

УДК 539.3

© 1994 г. А. Б. ФРЕЙДИН, А. М. ЧИСКИС

## ЗОНЫ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ

### Ч. 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

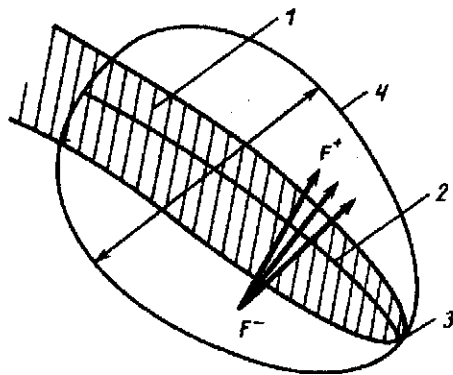
Система условий на границе фаз нелинейно-упругого изотропного материала, включающая кроме кинематического и силового дополнительное энергетическое условие, рассматривается как система уравнений для определения нормали к границе фаз и деформаций в одной из фаз в зависимости от деформаций в другой фазе. Деформации, при которых эта система уравнений имеет решение, образуют зону фазовых переходов. Предложенная процедура построения зоны и решений внутри нее иллюстрируется примерами. Рассматривается «тонкая» структура зоны фазовых переходов (соотнесение с областью неэллиптичности, поверхности нулевого скачка, критические точки).

Фазовые переходы (ФП) при деформировании твердых тел, сопровождающиеся изменением микроструктуры материала, на макроуровне могут приводить к скачкам параметров состояния, вводимых в континуальной механике. Выбор этих параметров для материалов с изменяющейся структурой является предметом самостоятельного обсуждения. Вместе с тем, простейшие модели ФП могут быть построены в рамках нелинейной теории упругости, когда с ФП связаны скачки деформаций (при сохранении сплошности) и плотности энтропии, а задача о сосуществовании фаз сводится к рассмотрению статических поверхностей разрыва деформаций.

Условия на поверхности разрыва деформаций как равновесной границе фаз обсуждались в начале 80-х годов [1—5] (см. также [6]). В результате к традиционному кинематическому и силовому условиям на поверхности разрыва (см., напр. [7]) добавилось энергетическое условие — аналог равенства химических потенциалов при равновесии жидких фаз [8]. Отметим, что уже формулировка кинематического и силового условий подразумевает определенные модели границы раздела фаз. В данной работе предполагается, что поле перемещений остается непрерывным; поверхностная энергия не учитывается. В этом случае кинематическое условие предписывает определенную структуру скачку градиента перемещений (условие Адамара), силовое условие означает непрерывность усилия на границе фаз, а энергетическое — равенство скачка свободной энергии на границе фаз работе усилия на векторе амплитуды скачка.

Еще раньше [9, 10], безотносительно энергетического условия, было показано, что необходимым условием возникновения разрывного поля деформаций, удовлетворяющего условию непрерывности усилия, является потеря эллиптичности уравнений равновесия: тензор упругостей теряет положительную определенность по крайней мере на части «диадной» траектории, соединяющей деформации по обе стороны разрыва. Допустимость разрывных решений с точки зрения только силового условия при учете кинематического исследовалась далее в различных работах. В контексте настоящего исследования отметим работы [11, 12], где ставится также вопрос о множестве возможных разрывных решений. При этом сосуществующие деформации могут как удовлетворять, так и не удовлетворять условиям сильной эллиптичности. Подчеркнем, что в такой постановке нормаль к поверхности разрыва не определяется, а задается.

Энергетическое условие является дополнительным ограничением на возможные разрывные решения. Оно было получено в [1] из принципа Гиббса (условия стационарности энергии), в [2, 3] — как следствие локальной устойчивости двухфазного поля деформаций. Несмотря на скалярный вид, условие термодинамического равновесия имеет тензорный характер: равновесие определяется сверткой нормалью к межфазной границе с тензором химического потенциала [1]. Можно показать [3], что в рамках механического подхода энергетическое условие равносильно требованию справедливости закона консервативности Эшелби [13], который в случае непрерывного поля де-



Фиг. 1

формаций выполняется автоматически в силу уравнений равновесия. При этом тензор химического потенциала совпадает с тензором энергии-импульса Эшелби.

Энергетическое условие может быть также получено [4, 5] как следствие универсальных соотношений на поверхности сильного разрыва [14] при условии нулевого производства энтропии на границе фаз и дополнительных соображениях о достижении состояния равновесия [6]. Такой подход позволяет включить в рассмотрение необратимые процессы [15]. Наконец отметим, что в случае нелинейно-упругих сред с микроструктурой равновесие на границе фаз также определяется термодинамическим условием с соответствующими тензорами химического потенциала [16].

В данной работе делается попытка анализа полной системы условий на равновесной границе фаз простого нелинейно-упругого изотропного материала. Эти условия, рассматриваемые как система уравнений для определения нормали к границе фаз и деформаций в одной из фаз в зависимости от деформаций в другой фазе, могут быть удовлетворены не при любых деформациях, что позволяет говорить о зоне фазовых переходов в пространстве деформаций. Согласно вышесказанному зона ФП необходимо пересекается зоной неэллиптичности. В случае одномерных моделей зона фазовых переходов вырождается в два числа, характеризующие, например, удлинения стержня по разные стороны от разрыва деформаций [17], или удельные объемы при переходах «газ—жидкость» в модели Ван-дер-Ваальса. Понятие зоны ФП в одномерных моделях становится нетривиальным только при рассмотрении зависимости этих величин от параметров типа температуры. В трехмерных моделях, когда вместо одной переменной имеется тензор деформаций, содержательным является рассмотрение зон ФП безотносительно температуры, что и делается в настоящей работе. Основное внимание будет уделено построению зон ФП и решений внутри них, границам зоны ФП, «тонкой» структуре зоны ФП: соотношению с областью неэллиптичности 1 (где нарушается неравенство Адамара [18]) и поверхностью нулевого скачка 2, критическим точкам 3 (см. схему на фиг. 1, где 4 — граница зоны ФП), конструированию модельных потенциалов, допускающих ФП различного вида.

Показывается, что в случае изотропной сжимаемой среды система условий на разрыве приводится к системе четырех уравнений для пяти неизвестных: двух ориентационных инвариантов, определяющих нормаль, и трех деформационных инвариантов в одной из фаз в зависимости от деформационных инвариантов другой фазы. В случае несжимаемого материала на единицу сокращается как число неизвестных, так и уравнений. Подчеркивается, что внутри зоны ФП решение имеет вид однопараметрического семейства. Отметим, что этот факт (не связанный с изотропией среды) не мог быть установлен при исследовании плоской задачи, где однопараметричности нет из-за кинематических ограничений.

В процессе деформирования впервые фазовый переход становится возможным, когда деформации выходят на границу зоны ФП. Имеется в виду принципиальная возможность ФП; вопрос о роли граничных условий не обсуждается. Однако, если границы зоны ФП построены, то однозначно определены области деформационного пространства, в которых ФП невозможен ни при каких граничных условиях. Граница зоны ФП определяется условиями разрешимости системы уравнений при учете ограничений на ориентационные инварианты. Выделяется случай, когда границе зоны ФП соответствуют точки границы области допустимых значений ориентационных инвариантов. При

этом на границе исчезает однопараметричность, нормаль к поверхности разрыва и амплитуда скачка определяются однозначно и лежат в главной плоскости тензора деформаций.

Процедура построения зоны ФП и высказанные гипотезы иллюстрируются рассмотрением некоторых изотропных сжимаемых и несжимаемых материалов. Выбор материалов определяется, в частности, желанием продемонстрировать разные ФП. Рассмотрены материал Адамара и несжимаемые материалы с потенциалом, зависящим только от одного из инвариантов тензора деформаций<sup>1</sup>. ФП в этих материалах различаются, в частности, видом одномерных переходов на границе зоны, когда скачком меняется только одно из главных удлинений (материал Адамара) или параметр сдвига (несжимаемый материал). В МА векторы скачка и нормали сонаправлены везде, включая границы зоны ФП, где эти векторы сонаправлены с одним из главных направлений тензора деформаций. В несжимаемых материалах нормаль и амплитуда ортогональны; на границе зоны ФП нормаль к межфазной границе определяется величинами наибольшего и наименьшего удлинений, а граница раздела фаз совпадает с соответствующей плоскостью сдвига. Отметим, что уже в случае потенциала, зависящего нелинейно от двух инвариантов, один из которых — третий, возможны различные углы между вектором скачка и нормалью к поверхности разрыва. В силу этого разным частям границы зоны ФП могут соответствовать скачки различного типа.

**1. Условия на разрыве деформаций. 1.1. Сжимаемый материал.** На статической поверхности разрыва деформаций должны выполняться кинематическое условие Адамара (следствие непрерывности поля перемещений)

$$[F] = fN \quad (1.1)$$

силовое условие Пуассона (непрерывность вектора усилия):

$$[S] \cdot N = 0 \quad (1.2)$$

энергетическое условие

$$[W] = f \cdot S \cdot N \quad (1.3)$$

Здесь  $F$  — градиент деформации  $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ , где  $X$  и  $x$  ( $X$ ) — векторы положения точек тела в отсчетной и актуальной конфигурациях,  $N$  — нормаль к поверхности разрыва в отсчетной конфигурации,  $W = W(F)$  — объемная плотность упругой энергии по отношению к отсчетной конфигурации (потенциал),  $S = \partial W / \partial F$  — тензор напряжений Пиолы,  $f$  — вектор амплитуды скачка; квадратными скобками обозначен скачок величины на поверхности разрыва  $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$ , где знаками (+) и (-) обозначены величины по разные стороны поверхности разрыва.

Условия (1.1), (1.2) являются общими (см., например, [7]); (1.3) связано с рассмотрением равновесной поверхности разрыва в гиперупругом материале [1—3].

Далее полагаем  $F^-$  — известным. Тогда условия (1.2), (1.3) при учете (1.1) образуют систему из четырех уравнений для пяти неизвестных, определяющих диаду  $fN$ . Поэтому решение, если оно есть, имеет вид однопараметрического семейства. Наложение дополнительных кинематических ограничений выделяет из этого семейства набор решений и может приводить к исчезновению однопараметричности решения. Например, в случае плоской задачи, (1.3) и два уравнения (2.2) после подстановки (1.1) образуют систему трех уравнений для трех неизвестных, задающих плоскую диаду.

**Определение.** Множество всех деформаций  $F$ , при которых может быть выполнена система условий на поверхности равновесного разрыва, образует зоны фазовых переходов (фиг. 1).

Зона ФП разбивается на пары областей (подзон), деформации в которых могут быть связаны скачками (1.1)—(1.3). Границы подзон могут как совпадать с границей зоны ФП, так и находиться внутри нее. Если уравнения (1.1)—(1.3) имеют нетривиальное нулевое решение  $f = 0$ , то эти области касаются по поверхности нулевого скачка.

<sup>1</sup> Будут рассмотрены в ч. 2 публикуемой работы.

В силу однопараметричности решения системы уравнений между точками подзон, вообще говоря, нет взаимнооднозначного соответствия. Однако кажутся справедливыми

*Гипотеза 1.* Если  $F$  принадлежит границе зоны, то диада  $fN$  определяется однозначно.

*Гипотеза 2.* Если  $F^-$  принадлежит границе зоны, то  $F^+$  также принадлежит границе.

Для дальнейшего анализа системы условий (1.1)—(1.3) удобно перейти в актуальную конфигурацию. Поскольку [18]  $N = |F^T \cdot n|^{-1} F^T \cdot n$ ,  $S = J T \cdot (F^T)^{-1}$ , где  $T$  и  $n$  — тензор напряжения Коши и нормаль к поверхности разрыва в актуальной конфигурации,  $J = \det F$ , то в силу (1.1)—(1.3):

$$F^+ = (E + a n) \cdot F^- \quad (1.4)$$

$$[T] \cdot n = 0 \quad (1.5)$$

$$[W] = J_a \cdot T \cdot n \quad (1.6)$$

где  $E$  — единичный тензор, амплитуды  $a$  и  $f$  связаны соотношением (ср. с [3]):

$$f = |F^T \cdot n| a \quad (1.7)$$

Отметим, что из (1.4) следует

$$J_+ = \det (E + a n) \det F^- = (1 + a \cdot n) J_- \quad (1.8)$$

*1.2 Несжимаемый материал.* Разрывы деформаций в изотропном несжимаемом материале рассматривались для случая плоских деформаций [10], а также для специального случая в [19]. Покажем для общего случая, что наложение связи приводит к тому, что диада  $a n$  описывается четырьмя величинами, а пятой искомой величиной является скачок реакции связи, причем уравнение для реакции скачка связи отщепляется. Поскольку

$$J \equiv 1 \quad (1.9)$$

то из (1.8) следует, что  $a$  и  $n$  ортогональны

$$a \cdot n = 0 \quad (1.10)$$

Проецируя определяющее соотношение [13]:

$$T = -p E + G \quad (1.11)$$

на  $n$  и плоскость разрыва, получим

$$[p] = -n \cdot [G] \cdot n \quad (1.12)$$

$$n \cdot [G] \cdot n = 0 \quad (1.13)$$

где  $p$  — неизвестная реакция связи (давление),  $G = G(F)$ ,  $dt F \equiv 1$ :

$$n \cdot G \cdot n = 0 \quad (1.14)$$

$n$  — проектор на плоскость разрыва. Энергетическое условие (1.6) с учетом (1.9)—(1.11) принимает вид

$$[W] = a \cdot G \cdot n \quad (1.15)$$

и означает равенство скачка потенциала работе касательных напряжений на амплитуде  $a$ .

Равенство (1.12) однозначно определяет  $[p]$ , если известны  $a$  и  $n$ . Поскольку (1.13), (1.15) есть три скалярных уравнения для четырех (в силу (1.10)) величин, характеризующих  $a n$ , то, как и для сжимаемого материала решение имеет вид однопараметрического семейства.

**2. Кинематические следствия условия Адамара.** По определению, левый тензор деформаций Коши — Грина

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.1)$$

Его инварианты

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \operatorname{tr} \mathbf{B}^{-1} \quad (2.2)$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

где  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — главные растяжения.

Введем ориентационные инварианты ( $k$  — целое):

$$N_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^k \cdot \mathbf{n} \quad (2.3)$$

По теореме Гамильтона — Кэли независимыми являются только два из них. Пара инвариантов (2.3) определяет ориентацию поверхности разрыва относительно главных векторов  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) тензора  $\mathbf{B}$ . Квадраты проекций нормали в этом базисе  $p_i = n_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) находятся из системы трех линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^{2k} p_i = N_k \quad (k = k_1, k_2), \quad \sum_{i=1}^3 p_i = 1 \quad (2.4)$$

Ниже устанавливаются связи между инвариантами тензоров деформаций на поверхности разрыва и другими кинематическими величинами. Используются обозначения

$$N_k^\pm = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_\pm^k \cdot \mathbf{n}, \quad t_k^\pm = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{B}_\pm^k \cdot \mathbf{n}, \quad \pi = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{a} \quad (2.5)$$

Из (1.4) и (2.1) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+ &= (\mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{n}\mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{B}_- + \mathbf{a}\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_- + \mathbf{B}_- \cdot \mathbf{n}\mathbf{a} + N_1^- \mathbf{a}\mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее для простоты записи индекс (—) не пишем. Тогда

$$I_1^+ = I_1 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} + N_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (2.7)$$

Поскольку [3]:

$$(\mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{n})^{-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{a}'\mathbf{n}), \quad \mathbf{a}' = (\mathbf{I} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^{-1} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = J_+ \mathbf{a}' / J_+ \quad (2.8)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+^{-1} &= \{(\mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{n}\mathbf{a})\}^{-1} = \\ &= \mathbf{B}^{-1} - (J/J_+) (\mathbf{n}\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{a}\mathbf{n}) + (J/J_+)^2 \mathbf{n}\mathbf{n} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

откуда, согласно (2.2) с учетом (1.8) и (2.9):

$$I_2^+ = (J_+/J)^2 I_2 - 2J_+ J \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{n} + J^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{a} \quad (2.10)$$

Из (2.5), (2.6) с учетом (1.8) следует

$$\mathbf{B}_+ \cdot \mathbf{n} = \frac{J_+}{J} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} + N_1 \mathbf{a})$$

В результате будем иметь

$$N_1^+ = (J_+/J)^2 N_1 \quad (2.11)$$

$$t_1^+ = \frac{J_+}{J} (t_1 + N_1 \pi) \quad (2.12)$$

Аналогично, из (2.5), (2.9), (2.10) при учете (1.8) и (1.14) следует

$$[N_{-1}] = [I_2/J^2] \quad (2.13)$$

$$t_{-1}^{\pm} = \frac{J}{J_{\pm}} (t_{-1} - \Pi \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \pi) = \frac{J}{J_{\pm}} \Pi \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{n} - \pi) \quad (2.14)$$

Соотношения (2.11)—(2.14) будут использованы далее при преобразовании условия Пуассона для тангенциальной составляющей усилия в выражение для тангенциальной составляющей амплитуды в зависимости от нормали и деформации одной из фаз, что в свою очередь позволит преобразовать соотношения (2.7), (2.10), а также энергетическое условие в уравнения, связывающие деформационные и ориентационные инварианты.

3. Преобразование условия Пуассона в выражение для амплитуды. Покажем, что в случае изотропного материала амплитуда  $a$  представима в виде изотропной векторной функции тензора  $B$  и вектора  $n$ :

$$a = \gamma n + \alpha B \cdot n + \beta B^{-1} \cdot n \quad (3.1)$$

где  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — подлежащие определению функции инвариантов  $N_1, N_{-1}$  и деформационных инвариантов. Поскольку в силу (1.8) и (1.14):

$$a = (J_+/J - 1) n + \pi \quad (3.2)$$

то из (3.1) следует

$$\pi = \alpha t_1 + \beta t_{-1} \quad (3.3)$$

причем согласно (3.1), (3.2) и (2.3):

$$\gamma = (J_+/J) - 1 - \alpha N_1 - \beta N_{-1} \quad (3.4)$$

Для сжимаемого изотропного материала

$$\mathbf{T} = \mu_0 \mathbf{E} + \mu_1 \mathbf{B} + \mu_{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (3.5)$$

$$\mu_0 = W_3 + 2J^{-1} I_2 W_2, \quad \mu_1 = 2J^{-1} W_1, \quad \mu_{-1} = -2J W_2 \quad (3.6)$$

(индексы 1, 2, 3 при  $W$  означают частные производные  $W = W(I_1, I_2, J)$  по  $I_1, I_2$  и  $J$  соответственно).

Для несжимаемого изотропного материала

$$\mathbf{G} = \mu_1 \mathbf{B} + \mu_{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (3.7)$$

$$W = W(I_1, I_2), \quad \mu_1 = 2W_1, \quad \mu_{-1} = -2W_2 \quad (3.8)$$

Согласно (1.11) переход к несжимаемому материалу осуществляется заменой

$$\mu_0 = -p, \quad J \equiv 1 \quad (3.9)$$

Подставив (3.5) в условие Пуассона (1.5) и разбив вектор усилия на составляющие вдоль и поперек  $n$ , получим

$$[\mu_0] + [\mu_1 N_1] + [\mu_{-1} N_{-1}] = 0 \quad (3.10)$$

$$[\mu_1 t_1] + [\mu_{-1} t_{-1}] = 0 \quad (3.11)$$

Из (3.10), (2.11) и (2.13) следует, что

$$-[\mu_0] = [\mu_{-1}] N_{-1} + \mu_{-1}^{\pm} [I_2/J] + (\mu_1^+ J_+^2/J^2 - \mu_1) N_1 \quad (3.12)$$

или, с учетом (3.6):

$$-1/2 J^2 [W_3] = [J W_1] N_1 + [J W_2] (I_2 - J^2 N_{-1}) \quad (3.13)$$

В случае сжимаемого материала условие Пуассона (3.12) для нормальной составляющей усилия связывает ориентационные инварианты и скачки де-

формационных инвариантов. Напротив, в случае несжимаемого материала (3.12) согласно (3.8), (3.9) определяет скачок реакции в зависимости от деформационных и ориентационных инвариантов

$$[p] = 2 [W_1] N_1 - 2 [W_2] N_{-1} - 2W_2^* [I_2] \quad (3.14)$$

Подставив (2.12), (2.14) и (3.6) в условие Пуассона для тангенциальной составляющей усилия (3.11) получим уравнение для определения  $\pi$ :

$$W_1^+ N_1 \pi + J^2 W_2^* \Pi \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \pi = -[W_1] t_1 + J^2 [W_2] t_{-1} \quad (3.15)$$

Подставив (3.3) в (3.15) и используя равенства  $\Pi \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \Pi \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -N_1 \Pi \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{n}$  (следствие (1.14)) и  $\Pi \cdot \mathbf{V}^{-2} \cdot \mathbf{n} = J^2 (\Pi \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + I_2 \Pi \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{n})$  (следствие теоремы Гамильтона — Кэли), получим, приравнявая коэффициенты при  $t_1$  и  $t_{-1}$ , систему линейных уравнений для определения  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от деформационных (в обеих фазах) и ориентационных инвариантов

$$\begin{vmatrix} N_1 W_1^+ & W_2^* \\ -J^2 N_1 W_2^+ & N_1 W_1^+ + (I_2 - J^2 N_{-1}) W_2^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -[W_1] \\ J^2 [W_2] \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

Соотношения (3.16) справедливы также для несжимаемого материала, если положить  $J \equiv 1$ .

1. Векторный базис представления (3.3) вырождается ( $t_1 = t_{-1} = 0$ ) если и только если  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$ . При этом согласно (2.6), (3.15):

$$[\mathbf{B}] = \lambda_i^2 (\mathbf{a}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{a}) \quad (3.17)$$

$$(W_1^+ + \lambda_\alpha^2 W_2^*) \pi_\alpha \mathbf{e}_\alpha + (W_1^+ + \lambda_\beta^2 W_2^*) \pi_\beta \mathbf{e}_\beta = 0 \quad (3.18)$$

$$\pi = \pi_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \pi_\beta \mathbf{e}_\beta, \quad \alpha, \beta \neq i$$

Если  $W_1^+ + \lambda_k^2 W_2^* \neq 0$  ( $k = \alpha, \beta$ ), то  $\pi = 0$ ,  $\mathbf{a} = (J_+/J - 1) \mathbf{n}$ .

Если

$$W_1^+ + \lambda_k^2 W_2^* = 0 \quad (3.19)$$

только при  $k = \alpha$ , то  $\pi_\alpha = 0$ . При этом согласно (3.2), (3.17)  $\lambda_\alpha^+ = \lambda_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\alpha^+ = \mathbf{e}_\alpha$ . Условие (3.19) принимает вид

$$W_1^+ + \lambda_{\alpha+}^2 W_2^* = 0 \quad (3.20)$$

Так как

$$J \sigma_i = \lambda_i \partial W / \partial \lambda_i \quad (3.21)$$

где  $\sigma_i$  — главные напряжения Коши, то

$$\frac{2}{J} (W_1 + \lambda_k^2 W_2) = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} = \frac{Q_i(\mathbf{e}_j)}{\lambda_j^2} = \frac{Q_j(\mathbf{e}_i)}{\lambda_i^2} \quad (3.22)$$

где  $Q_i(\mathbf{e}_j)$  —  $i$ -ое главное значение акустического тензора  $\mathbf{Q}(\mathbf{B}, \mathbf{e})$  в случае  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_j$  [18]. Следовательно, (3.20) означает превращение неравенства Бейкера — Эрикссена  $(\sigma_i^+ - \sigma_\beta^+) / (\lambda_{\alpha+}^2 - \lambda_{\beta+}^2) > 0$  в равенство, когда  $\det \mathbf{Q}(\mathbf{B}_+, \mathbf{e}) = 0$  ( $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i^+, \mathbf{e}_\beta^+$ ), то есть потерю эллиптичности в одной из сосуществующих фаз.

Условие (3.19) выполняется при  $k = \alpha$  и  $\beta$  ( $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ ) только, если  $W_1^+ = W_2^* = 0$ .

Таким образом, возможность  $\pi \neq 0$  при  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$  без учета энергетического условия определяется существованием особых точек, удовлетворяющих (3.20) и (3.13).

2 Если определитель системы (3.16)  $\Delta = N_1 \{N_1 W_{1+}^2 + J^2 W_{2+}^2 +$

+  $(I_2 - J^2 N_{-1}) \{W_{1+}, W_{2+}\} = 0$ , то  $\pi \neq 0$  только если  $[W_1] = [W_2] = 0$ . При  $n = e$ , (ср. с (3.20))  $\Delta = \lambda_1^2 (W_1 + \lambda_2^2 W_2) (W_1 + \lambda_2^2 W_2)$ .

3. Отметим случаи, когда  $\pi$  выражается особенно просто: если  $W_1 = \text{const}$ ,  $W_2 = \text{const}$ ,  $\Delta \neq 0$ , то

$$\pi = 0 \quad (3.23)$$

если  $W = W(I_\alpha, J)$ ,  $W_\alpha^+ \neq 0$ , где  $\alpha = 1$  или  $2$ , то

$$\pi = -[W_\alpha] t_1 / (W_\alpha^+ N_1) \quad (3.24)$$

4. Система уравнений для деформационных и ориентационных инвариантов. Подставляя амплитуду  $a$  в виде (3.1) с учетом (3.4) и (3.16) в выражения для инвариантов  $I_1^+$  (2.7),  $I_2^+$  (2.10) и в энергетическое условие, имеющее, согласно (1.6), (3.5), вид

$$[W] = \mu_0 [J] + 2W_1 a \cdot B \cdot n - 2J^2 W_2 a \cdot B^{-1} \cdot n \quad (4.1)$$

и используя теорему Гамильтона — Кэли, получим три скалярных уравнения, связывающих пять неизвестных инвариантов  $I_1^+$ ,  $I_2^+$ ,  $J^+$ ,  $N_1$ ,  $N_{-1}$  с тремя заданными:  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $J$ . Добавляя условие Пуассона (3.13) для нормальной составляющей усилия, приходим к системе четырех уравнений

$$\Phi_i(\dots; \dots) = 0 \quad (i = 1 \dots 4) \quad (4.2)$$

где точка с запятой разделяет неизвестные и параметры  $I_1, I_2, J$ .

В случае несжимаемого материала энергетическое условие, согласно (4.1) и (3.9), имеет вид

$$[W] = 2W_1 a \cdot B \cdot n - 2W_2 a \cdot B^{-1} \cdot n \quad (4.3)$$

Уравнение (3.13) не добавляется, а определяет, согласно (3.14), скачок реакции связи. Поэтому система (4.2) состоит только из трех уравнений. При этом также на единицу уменьшается как число неизвестных так и параметров, поскольку следует положить  $J^+ = J = 1$ .

Вместо деформационных инвариантов (2.2) можно использовать главные растяжения  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Безотносительно системы (4.2) область допустимых значений для неизвестных  $\lambda_i^+$  есть

$$\lambda_i^+ > 0 \quad (4.4)$$

Ограничения на  $N_k$  следуют из требования  $p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — отрицательности решений линейной системы (2.4). Нетрудно показать, что область допустимых значений ориентационных инвариантов на плоскости  $N_s, N_t$  ( $s \neq t$  — целые) является треугольник  $D$  с вершинами

$$(\lambda_i^{2s}, \lambda_j^{2t}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

соответствующими  $n = e_i$  — совпадению нормали с главными направлениями В. Сторона треугольника, соединяющая вершины  $i$  и  $j$ , соответствует всем возможным положениям нормали в  $(i - j)$  — главной плоскости В, когда  $p_k = 0$  ( $i, j, k$  — разные). Согласно (4.5) изменению  $\lambda_i$  соответствует движение вершин треугольника по кривой

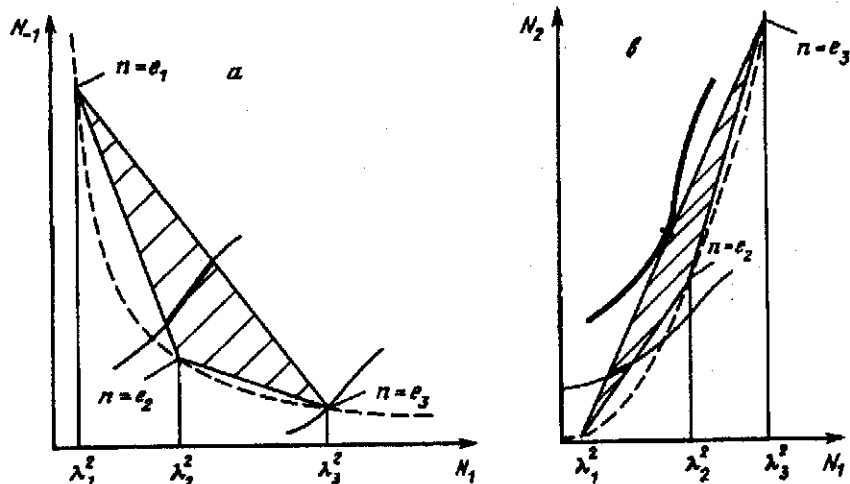
$$N_t = N_i^{t/s} \quad (4.6)$$

которую назовем скелетной.

В случае  $s = 1, t = -1$  (фиг. 2) скелетная кривая и стороны треугольника  $D$  с вершинами  $(\lambda_i^2, \lambda_j^{-2})$  определяются соотношениями ( $i, j$  — разные,  $\lambda_i \leq \lambda_j$ ):

$$N_{-1} = N_i^{-1}, N_i > 0 \quad (4.7)$$





Фиг. 2

$$N_{-1} = \lambda_1^{-2} + \lambda_7^{-2} - \lambda_1^{-2}\lambda_7^{-2}N_1, \quad \lambda_1^2 \leq N_1 \leq \lambda_7^2 \quad (4.8)$$

Зависимость (4.8) может быть также получена как следствие теоремы Гамильтона — Кэли для соответствующих плоских частей  $B_0$  тензора  $B$ :

$$B_0 - (\lambda_1^2 + \lambda_7^2) E_0 + \lambda_1^2 \lambda_7^2 B_0^{-1} = 0 \quad (E_0 = E - e_k e_k)$$

если свернуть  $B_0$  с диадой  $pp$ .

В случае  $s = 1, t = 2$  скелетная кривая и стороны треугольника с вершинами  $(\lambda_1^2, \lambda_7^2)$  есть соответственно

$$N_2 = N_1^2, \quad N_2 = (\lambda_1^2 + \lambda_7^2) N_1 - \lambda_1^2 \lambda_7^2 \quad (4.9)$$

Граница зоны ФП в пространстве  $\lambda_i$  определяется условиями разрешимости системы (4.2) при учете ограничений на  $N_k$  и  $\lambda_i^+$ .

Подставив решение трех уравнений системы (4.2) относительно деформационных инвариантов  $I_1^+, I_2^+, J^+$  в четвертое уравнение, получим зависимость

$$\psi(N_1, N_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0 \quad (4.10)$$

которая при соответствующих условиях определяет линию на плоскости  $N_1, N_{-1}$  при заданных  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (или  $I_1, I_2, J$ ). Однопараметрическому семейству нормалей соответствует пересечение этой линии с треугольником  $D$ . Множество параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  при которых это пересечение существует, образует зону ФП, которая определяется неравенствами:

$$\psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq 0 \leq \psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4.11)$$

$$\psi_1 = \min_{N_1, N_{-1} \in D} \psi(N_1, N_{-1}, \dots), \quad \psi_2 = \max_{N_1, N_{-1} \in D} \psi(N_1, N_{-1}, \dots)$$

Функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  должны быть симметричными относительно перестановки своих аргументов, поэтому достаточно провести построение зоны ФП в одной из областей, где  $\lambda_i$  — упорядочены:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \quad (4.12)$$

Если зависимости деформационных инвариантов  $I_1^+, I_2^+, J^+$  от  $\lambda_i$  и

ориентационных инвариантов неоднозначны, то разным ветвям соответствуют разные зависимости (4.10) и разные зоны ФП.

Можно предположить, что наибольшее и/или наименьшее значения  $\psi(N_1, N_{-1}, \dots)$  достигаются на границе  $D$ . Тогда нормаль к поверхности разрыва на границе зоны ФП определяется однозначно и лежит в главной плоскости или совпадает с главным вектором  $B$ .

Геометрически это означает следующее. Изменение  $\lambda_j$  приводит на плоскости  $N_1, N_{-1}$  к изменению относительного положения линии (4.10) и области  $D$ . Решение может исчезать при малом изменении  $\lambda_j$ , в частности, когда линия (4.10) и  $D$  ОДЗ имеют только одну общую точку. При этом линия (4.10) проходит через одну из вершин треугольника, не пересекая его, или касается извне одной из сторон (фиг. 2). Соответствующие  $\lambda_j$  образуют границу зоны (несколько точек касания означают ветвление решения (4.10) на границе зоны).

Эти соображения, не исчерпывающие, конечно, вопроса о границе зон, иллюстрируются приведенными ниже примерами и поясняют гипотезу 1.

Отметим, что в невырожденных случаях:

1. Если  $n$  лежит в главной плоскости  $B$ , то согласно (3.1)  $a$  лежит в этой же плоскости. В соответствующих точках границы зоны ФП происходят плоские скачки деформации. Как показано ниже, в случае несжимаемого материала с потенциалом, зависящим только от одного из инвариантов, это одномерные переходы по параметру сдвига.

2. Если  $n = e_i$ , то  $a$  и  $e_i$  — сонаправлены,  $B_+$  и  $B$  — соосны, причем (см. (3.17)):

$$\lambda_i^+ = J_+ \lambda_i / J, \quad \lambda_j^+ = \lambda_j \quad (j \neq i) \quad (4.13)$$

что соответствует одномерному фазовому переходу по  $i$ -му главному растяжению. Силовое (1.5) и энергетическое (1.6) условия принимают вид

$$\sigma_i^+ = \sigma_i, \quad W^+ - W = (J_+ - J) \sigma_i$$

откуда с учетом (3.21) следуют известные в теории одномерных ФП соотношения Максвелла [17]:

$$(W^+ - W) / (\lambda_i^+ - \lambda_i) = \partial W / \partial \lambda_i = \partial W^+ / \partial \lambda_i^+ \quad (4.14)$$

геометрическая интерпретация которых сводится к определению  $\lambda_i$  и  $\lambda_i^+$  по правилу равных площадей для кривой  $S_i(\lambda_i)$  ( $S_i = \partial W / \partial \lambda_i$ ). Два уравнения (4.14) определяют  $\lambda_i^+$  и  $\lambda_i$  как функции двух других главных растяжений, не меняющихся при разрыве. Одномерные переходы (4.13), принципиально невозможные в несжимаемом материале, происходят, например, на границе зоны ФП в материале Адамара (см. ниже).

5. Материал Адамара (сжимаемый материал Муни — Ривлина). 5.1. Зона ФП и семейство решений. Потенциал Адамара

$$W = 1/2 c I_1 + 1/2 d I_2 + \Phi(J) \quad (5.1)$$

$$c \geq 0, \quad d \geq 0, \quad c + d > 0 \quad (5.2)$$

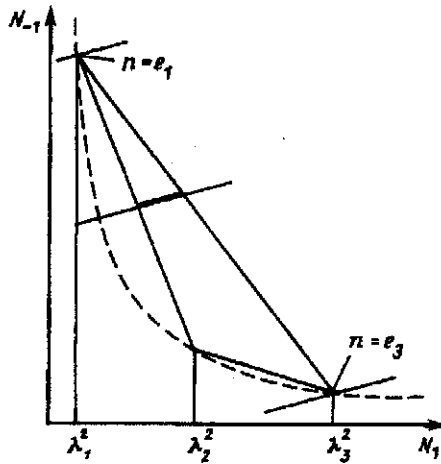
в связи с вопросом о разрывных деформациях рассматривался в [12]; энергетическое условие при этом не учитывалось.

Согласно (3.2) и (3.23) вектор амплитуды скачка  $a$  и нормаль  $n$  параллельны

$$a = (J_+ / J_- - 1) n \quad (5.3)$$

Условие Пуассона для нормальной составляющей усилия (3.13) принимает вид

$$c N_1 + d (I_2^- - J_2^2 N_{-1}) = J_2^2 U(J_+, J_-) \quad (5.4)$$



Фиг. 3

$$U(J_+, J_-) \triangleq -[\Phi']/[J] \quad (5.5)$$

где штрих означает производную по  $J$ ,  $N_k = N_k^-$ .

Подставляя (5.3) в уравнения (2.7) для  $I_1^+$ , (2.10) для  $I_2^+$  и энергетическое условие (4.1), получаем

$$[I_1] = (J_+^2/J_-^2 - 1) N_1, \quad [I_2] = (J_+^2/J_-^2 - 1) (I_2^- - J_-^2 N_{-1}) \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{2} c [I_1] + \frac{1}{2} d [I_2] + [\Phi] = \{\Phi_-'\} + c J_-^{-1} N_1 + d J_-^{-1} (I_2^- - J_-^2 N_{-1}) \quad [J] \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) в (5.7) и используя (5.4) получаем уравнение, связывающее  $J_+$  и  $J_-$ :

$$\Phi(J_-, J_+) \triangleq \frac{1}{2} (\Phi_+' + \Phi_-') (J_+ - J_-) - (\Phi_+ - \Phi_-) = 0 \quad (5.8)$$

Подставив его решение  $J_+(J_-)$  в (5.4), приходим к уравнению

$$c N_1 + d (I_2^- - J_-^2 N_{-1}) = J_-^2 u(J_-) \quad (5.9)$$

где управляющая функция

$$u(J_-) \triangleq U(J_+(J_-), J_-)$$

определяется видом потенциала (зависимостью  $\Phi(J)$ ) при использовании решения уравнения (5.8). Уравнение (5.9) независимо от вида функции  $\Phi(J)$  определяет на плоскости  $N_1, N_{-1}$  прямую. Ее пересечение с областью  $D$  допустимых значений  $N_1, N_{-1}$  (фиг. 3) задает однопараметрическое семейство нормалей, которому соответствует  $J_+ = \text{const}$ , определяемое из (5.8), и семейство амплитуд (5.3) с постоянным модулем  $|a| = J_+(J_-)/J_- - 1$ . Величины  $I_1^+$  и  $I_2^+$  вычисляются по формулам (5.6)

Отметим, что учет энергетического условия привел к изменению роли условия Пуассона: уравнение (5.4) безотносительно (5.8) в отличие от (5.9), определяло  $J_+$  в зависимости от  $J_-$  при любых заданных ориентациях поверхности разрыва.

Наибольшее и наименьшее значения левой части (5.4) достигаются в вершинах треугольника  $D$ , в которых  $n = e_{\max}$  или  $n = e_{\min}$ , где  $e_{\max}$  и  $e_{\min}$  — главные вектора, соответствующие наибольшему  $\lambda_{\max}$  и наименьшему  $\lambda_{\min}$  главным растяжениям.

Поэтому решение уравнения (5.4) относительно  $J_+$  необходимо удовлетворяет неравенствам

$$H(\lambda_{\min}^-) \leq J_-^2 U(J_+, J_-) \leq H(\lambda_{\max}^-)$$

$$H(\lambda) \triangleq c\lambda^2 + d(I_2 - J^2\lambda^{-2}) = c\lambda^2 + d\lambda^2(I_1 - \lambda^2) > 0 \quad (5.10)$$

полученным иным способом в [12].

Учет энергетического условия приводит к замене  $U(J_+, J_-)$  на  $u(J_-)$  (уравнения (5.4) на (5.9)). Неравенства (5.10) из требования существования разрывного решения, удовлетворяющего условию Пуассона, превращаются в определение зоны ФП (делим (5.10) на  $J_-^2$ ):

$$h(\lambda_2^-, \lambda_3^-) \leq u(J_-) \leq h(\lambda_2^-, \lambda_1^-) \quad (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3) \quad (5.11)$$

$$h(\lambda_i, \lambda_j) \triangleq c\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2} + d(\lambda_i^{-2} + \lambda_j^{-2})$$

Неравенства (5.11) имеют ясную геометрическую интерпретацию. Изменение  $\lambda_i^-$  приводит к изменению относительного положения прямой (5.9) и треугольника (4.8), причем прямая пересекает треугольник, только пересекая его сторону, соответствующую главной плоскости наименьшего и наибольшего растяжений. Граничные прямые проходят через одну из вершин, где  $n = e_{\max}$  или  $n = e_{\min}$ . При этом неравенства (5.11) обращаются в равенства

$$u(J_-) = h(\lambda_2^-, \lambda_i^-) \quad (i = 1, 3) \quad (5.12)$$

определяющие границы зоны — поверхности одномерных переходов (4.13) по наибольшему или наименьшему главным растяжениям. При ФП на границах (5.12):

$$n = e_j, \quad \lambda_i^+ = \lambda_i^-, \quad \lambda_j^+ = \lambda_j^- J_+ / J_- \quad (5.13)$$

где  $i, j = 1, 3, i \neq j$ ;  $J_+$  — решение уравнения (5.8).

Сделаем два замечания. Пересечение прямой (5.9) с  $i$ - $j$ -стороной треугольника (4.8) единственным образом определяет положение нормали в соответствующей главной плоскости В соотношениями

$$N_i = J^2 / R(J_-, \lambda_k^-), \quad n_k = 0 \quad (k \neq i, j) \quad (5.14)$$

$$R(J, \lambda_k) \triangleq (c + d\lambda_k^2) / (u(J) \lambda_k^2 - d) \quad (5.15)$$

Каждое однопараметрическое семейство решений содержит два плоских скачка (в двух главных плоскостях В, одна из которых — плоскость наибольшего и наименьшего растяжений).

**5.2. Поверхность нулевого скачка и эллиптичность.** Инварианты  $J_-$  и  $J_+$  входят в (5.8) симметрично, поэтому любая ветвь решения уравнения (5.8) симметрична на плоскости  $J_0, J_+$  относительно прямой  $J_+ = J_-$ . Упорядочение величин  $J_-$  и  $J_+$  (например,  $J_- < J_+$ ) приводит к разбиению зоны ФП на пару подзон.

Из (5.3) следует, что в материале Адамара  $a = 0$ , если и только если  $J_+ = J_-$ . Следовательно, поверхности нулевого скачка соответствует пересечение ветви решения уравнения (5.8) с прямой  $J_+ = J_-$  при  $J_- = J_c$ . Эта поверхность — поверхность соприкосновения подзон — лежит внутри зоны ФП.

Величина  $J_c$  определяется из требования существования нетривиального нулевого решения  $J_+ = J_- = J_c$ . Считая  $\Phi(J)$  представимой в виде ряда Тейлора, получим из (5.8):

$$\frac{1}{2} \Phi_{-}''' [J]^3 + \frac{1}{24} \Phi_{-}^{IV} [J]^4 + \dots = 0 \quad (5.16)$$

Из (5.16) следует, что уравнение (5.8) имеет решение, если

$$\Phi'''(J_c) = 0 \quad (5.17)$$

Попутно отметим, что рассмотрение малых скачков требует учета в разложении  $\Phi(J)$  слагаемых не ниже четвертого порядка. Поскольку

$$-U(J_+, J_-) = \Phi_{-}'' + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{-}''' [J] + \frac{1}{3!} \Phi_{-}^{IV} [J]^4 + \dots \quad (5.18)$$

то

$$u(J_c) = -\Phi''(J_c) \quad (5.19)$$

Следовательно, в силу (5.11) поверхность нулевого скачка определяется соотношениями

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = J_c, \quad h(\lambda_2, \lambda_3) \leq -\Phi''(J_c) \leq h(\lambda_2, \lambda_1) \quad (5.20)$$

Отметим, что из (5.16), (5.18) следует, что

$$u'(J_c) = 0, \quad u''(J_c) = -\Phi^{IV}(J_c)/3 \quad (5.21)$$

( $J_c$  — точка экстремума  $u(J)$  — максимума, если  $\Phi^{IV}(J_c) > 0$ ).

Так как  $U(J_+, J_-) = U(J_-, J_+)$ , то  $u(J)$  не меняется при ФП

$$u(J_+) = u(J_-) \quad (5.22)$$

Следовательно  $J_c$  — точка локального максимума или минимума непрерывной  $u(J)$  безотносительно разложимости  $\Phi(J)$  в ряд Тейлора.

Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в точке  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  имеют вид [12], [20]:

$$c + d\lambda_i^2 > 0, \quad H(\lambda_i) + J^2 \Phi''(J) > 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.23)$$

Первое неравенство (ср. с (3.22)) выполняется в силу (5.2). Второе неравенство выделяет в зоне ФП (5.11) область сильной эллиптичности

$$h(\lambda_2, \lambda_3) + \Phi''(J) > 0 \quad (5.24)$$

Это условие допускает простую интерпретацию. Поскольку согласно (3.21):

$$\sigma_i = Jh(\lambda_j, \lambda_k) + \Phi' \quad (i, j, k \text{ — разные}) \quad (5.25)$$

то

$$\partial \sigma_1 / \partial \lambda_1 = \lambda_2 \lambda_3 \{h(\lambda_2, \lambda_3) + \Phi''\}, \quad \partial^2 \sigma_1 / \partial \lambda_1^2 = \lambda_2 \lambda_3 \Phi''' \quad (5.26)$$

Из сравнения (5.24) и первого из равенств (5.26) следует, что условие сильной эллиптичности для материала Адамара равносильно условию

$$\partial \sigma_1 / \partial \lambda_1 > 0 \quad (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3) \quad (5.27)$$

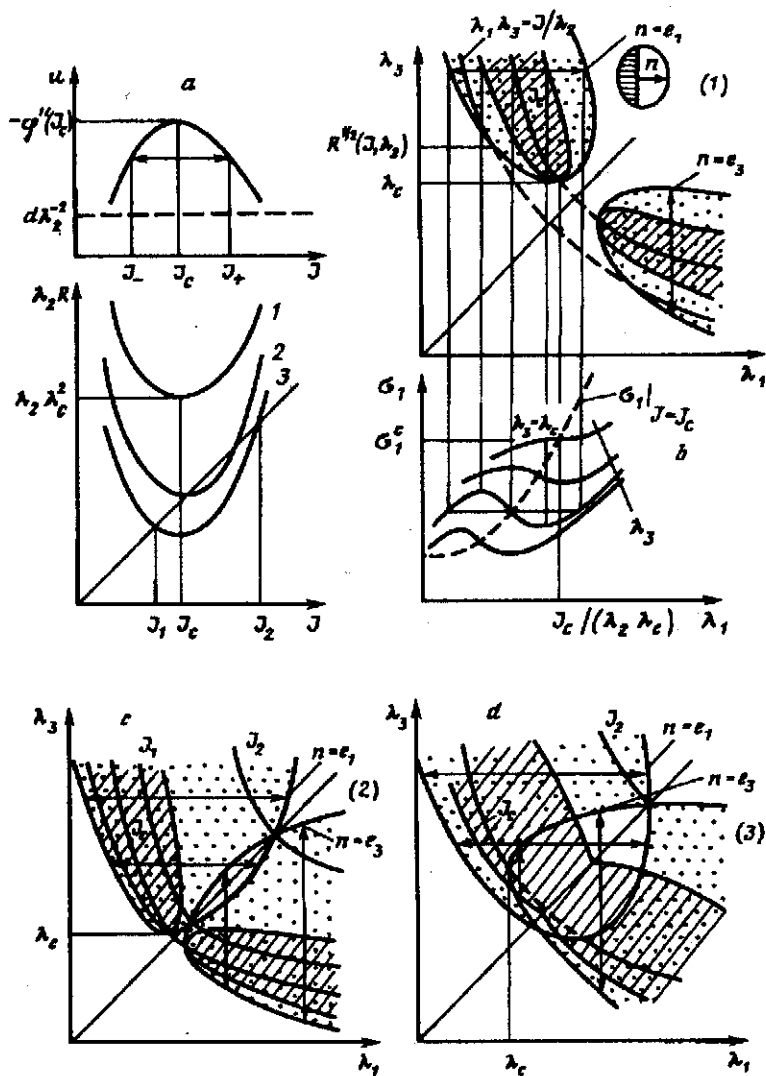
Из сравнения (5.24) и левой части (5.20) следует, что поверхность нулевого скачка находится внутри области неэллиптичности.

Дифференцируя (5.25) и учитывая (5.17) получаем, что на поверхности нулевого скачка

$$\partial^2 \sigma_1 / \partial \lambda_1^2 = 0, \quad \partial^2 \sigma_2 / \partial \lambda_2^2 = 0, \quad \partial^2 \sigma_3 / \partial \lambda_3^2 = 0 \quad (5.28)$$

Границей поверхности нулевого скачка является линия ее пересечения с границей зоны ФП (см. (5.20)):

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = J_c, \quad h(\lambda_2, \lambda_k) + \Phi''(J_c) = 0 \quad (k = 1, 3) \quad (5.29)$$



Фиг. 4

Часть этой линии, соответствующая  $k = 3$ , согласно (5.24) является линией касания границ зоны ФП и области эллиптичности.

Действительно, в окрестности  $J = J_c$  уравнения границ имеют вид

$$h(\lambda_2, \lambda_3) + \Phi''(J_c) + \Phi'''(J_c)(J - J_c) + \dots = 0$$

$$h(\lambda_2, \lambda_3) + u(J_c) - u'(J_c)(J - J_c) + \dots = 0$$

В силу (5.19) и (5.17), (5.21) эти уравнения совпадают с точностью до  $(J - J_c)^2$ .

Рассмотрим изменение напряжения на траектории одномерного перехода (5.13) по  $\lambda_1$  (фиг. 4). Согласно (5.26) при пересечении границы области эллиптичности  $\partial \sigma_1 / \partial \lambda_1 = 0$  (ср. с (5.27)); на поверхности нулевого скачка  $\partial^2 \sigma_1 / \partial \lambda_1^2 = 0$ ; при пересечении с линией (5.29) при  $k = 3$  — критической линией —

$$\partial \sigma_1 / \partial \lambda_1 = \partial^2 \sigma_1 / \partial \lambda_1^2 = 0 \quad (5.30)$$

Оставшаяся часть линии (5.29) (при  $k = 1$ ) расположена внутри области неэллиптичности в ее точках  $\partial\sigma_3/\partial\lambda_3 = 0$ .

*Замечание.* В области эллиптичности в силу (5.11), (5.24)

$$u + \Phi'' > 0 \quad (5.31)$$

Так как в силу (5.5), (5.8):

$$\frac{\partial U(J_+, J_-)}{\partial J_+} = -\frac{U + \Phi_+''}{[J]}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial J_{\pm}} = \frac{1}{2}(U + \Phi_{\pm}'') [J] \quad (5.32)$$

то  $dJ_+/dJ_- = -(u + \Phi_-'')/(u + \Phi_+'')$ ,  $u_- = 2(u_- + \Phi_-'')/[J]$ . Тогда из (5.31) следует, что, если сосуществующие деформации принадлежат области эллиптичности, то

$$dJ_+/dJ_- < 0 \quad (5.33)$$

$$u'(J_-) \geq 0, \quad \text{если } J_- \geq J_+ \quad (5.34)$$

Неравенства (5.33), (5.34) являются необходимыми условиями эллиптичности сосуществующих деформаций; (5.34) может использоваться как ограничение при выборе модельных зависимостей  $\Phi(J)$ .

**5.3. Построение зоны ФП.** В алгоритме построения сечений зоны ФП плоскостями  $\lambda_2 = \text{const}$  (фиг. 4) удобно использовать в качестве вспомогательных параметры  $J$  и  $\lambda_2$ . Рассмотрим вначале случай плоской деформации, когда  $\lambda_2$  — параметр плоской деформации, а не обязательно промежуточное по величине главное растяжение.

Запишем неравенства (5.11) в виде

$$\lambda_1^2 \leq R(J, \lambda_2) \leq \lambda_3^2 \quad (5.35)$$

Рассмотрим на плоскости  $\lambda_2 = \text{const}$  гиперболы

$$\lambda_1 \lambda_3 = J/\lambda_2 \quad (5.36)$$

Если они пересекают зону ФП, то, согласно (5.14), (5.35):

$$u(J) > d\lambda_2^{-2} \quad (5.37)$$

Неравенство (5.37) — вспомогательное. Если оно не удовлетворено, то при выбранных значениях  $J$ ,  $\lambda_2$  для данной ветви решения уравнения (5.8) разрывных решений нет.

Поскольку  $\lambda_1^2 \leq J/\lambda_2 \leq \lambda_3^2$  (т. к.  $\lambda_1 \leq \lambda_3$ ), то в зависимости от соотношения  $R(J, \lambda_2)$  и  $J/\lambda_2$  одно из неравенств (5.35) выполняется автоматически. Следовательно, сечение зоны ФП содержит те части гипербол (5.36), (5.37), для которых при  $\lambda_1 \leq \lambda_3$ :

$$\lambda_3 \in [R^{1/2}, \infty), \quad \text{если } \xi(J, \lambda_2) > 1 \quad (5.38)$$

$$\lambda_1 \in (0, R^{1/2}], \quad \text{если } \xi(J, \lambda_2) < 1$$

( $\xi = \lambda_2 R(J, \lambda_2)/J$ ), а границы зоны ФП определяются уравнениями

$$\lambda_3 = R^{1/2}(J, \lambda_2), \quad \text{если } \xi > 1$$

$$\lambda_1 = R^{1/2}(J, \lambda_2), \quad \text{если } \xi < 1 \quad (5.39)$$

и являются линиями одномерных переходов (5.13), при которых, соответственно:

$$n = e_1, \quad \lambda_3^+ = \lambda_3^- = R^{1/2}, \quad \lambda_1^+ = \lambda_1^- J_+/J_-, \quad \sigma_1^+ = \sigma_1^-$$

$$n = e_3, \quad \lambda_1^+ = \lambda_1^- = R^{1/2}, \quad \lambda_3^+ = \lambda_3^- J_+/J_-, \quad \sigma_3^+ = \sigma_3^-$$

(напомним, что  $R(J_+, \lambda_2) = R(J_-, \lambda_2)$ ).

Сечение области неэллиптичности строится аналогично. Из неравенства

$$h(\lambda_2, \lambda_3) + \Phi''(J) \leq 0 \quad (5.40)$$

следует вспомогательное неравенство:

$$-\Phi''(J) \geq d\lambda_2^{-2} \quad (5.41)$$

(ср. с (5.37)). С учетом (5.41) неравенство (5.40) может быть переписано в виде, аналогичном (5.38):

$$\lambda_3 \geq \Omega^{1/2}(J, \lambda_2), \quad \Omega = -(c + d\lambda_2^2)/(\Phi''(J)\lambda_2^2 + d) \quad (5.42)$$

В зависимости от соотношения  $\Omega(J, \lambda_2)$  и  $J/\lambda_2$  гиперболы (5.36) на плоскости  $\lambda_2 = \text{const}$  целиком лежат в области неэллиптичности, если  $\lambda_2\Omega(J, \lambda_2) < J$ , или пересекают границу эллиптичности при  $\lambda_3 = \Omega^{1/2}(J, \lambda_2)$ , если  $\lambda_2\Omega(J, \lambda_2) > J$ .

Гипербола  $\lambda_1\lambda_3 = J_c/\lambda_2$ , соответствующая поверхности нулевого скачка пересекает границу зоны ФП при

$$\lambda_3 = \lambda_c, \quad \text{если } \xi_c > 1 \quad (5.43)$$

$$\lambda_1 = \lambda_c, \quad \text{если } \xi_c < 1 \quad (5.44)$$

$$\lambda_c = R^{1/2}(J_c, \lambda_2) = \Omega^{1/2}(J_c, \lambda_2), \quad \xi_c = \lambda_2\lambda_c^2(\lambda_2)/J_c \quad (5.45)$$

Так как при движении вдоль сечения границы зоны ФП согласно (5.39):

$$d \ln \lambda_i = - \frac{z(J, \lambda_2)}{1 + \lambda_i z(J, \lambda_2)} \quad (j = 1, 3; i \neq j)$$

$$z(J, \lambda_2) = R^{1/2}\lambda_2^3 u'(J)/\{2(u(J)\lambda_2^2 - d)\}$$

то в точках (5.43), (5.44)  $d\lambda_3/d\lambda_1 = 0$  или  $d\lambda_1/d\lambda_3 = 0$  соответственно (в силу (5.21)). Точка (5.43)  $\lambda_1 = J_c/(\lambda_2\lambda_c)$ ,  $\lambda_3 = \lambda_c$  принадлежит кроме того границе эллиптичности (согласно (5.45)) и является критической (ср. с (5.29)). В случае  $\lambda_2 : \lambda_2 R(J_c, \lambda_2)$  область неэллиптичности содержит всю гиперболу  $\lambda_1\lambda_3 = J_c/\lambda_2$  (фиг. 4,  $d$ ).

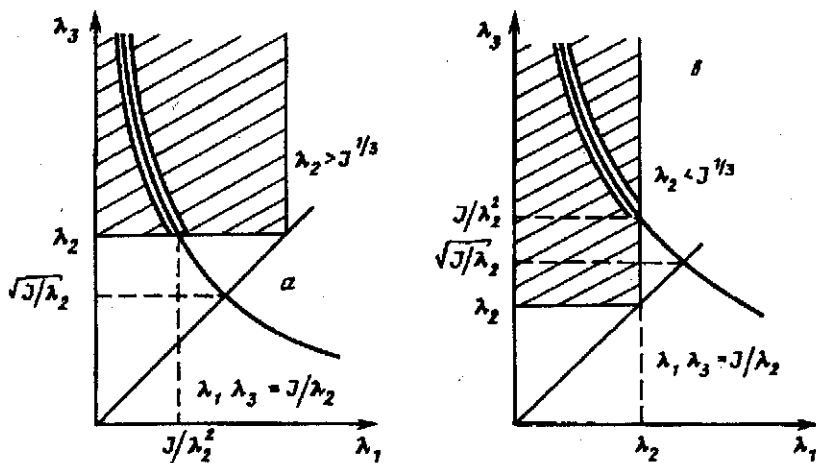
*Замечание.* Разрывы деформаций бесконечно малой амплитуды при условии сохранения эллиптичности по обе стороны поверхности разрыва в случае невырожденной области НЭ возможны только в окрестности критической линии, причем согласно (5.21), (5.33)  $J_c$  должно соответствовать  $\max u(J) \min R(J, \dots)$ .

Предложенная процедура построения зоны ФП иллюстрируется фиг. 4,  $a, d$ . (полагая  $u(J_c) = \max u(J)$ ). Заштрихована область неэллиптичности в зависимости от относительного положения кривой  $r(J) = \lambda_2 R(J, \lambda_2)$  и прямой  $r = J$  гиперболы  $\lambda_1\lambda_3 = J/\lambda_2$  ограничены (фиг. 4,  $a-d$ ): 1) только линией одномерных переходов по  $\lambda_1$ ; сечение границы зоны ФП содержит критическую точку (т. к.  $\xi(J, \dots) > 1$ ); 2) линиями одномерных переходов по  $\lambda_1$  (при  $J < J_1$  и  $J > J_2$ ) и  $\lambda_3$  («внутренняя» граница при  $J_c < J_1 < J < J_2$ ), критическая точка сохраняется; 3) внешней ( $J < J_1$ ) и внутренней ( $J \in (J_1, J_2)$ ,  $J_1 < J_c < J_2$ ) границами, критическая точка исчезает ( $\xi_c < 1$ ).

Во всех случаях граница содержит поверхность одномерных переходов, на которой  $n = e_{\min}$ . Отметим, что  $\lambda_3 = \lambda_c$  играет роль «критической температуры» для диаграмм  $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda_1)$  подобно критической температуре в случае кривых Ван-дер-Ваальса.

Как иллюстрацию рассмотрим двухстадийное растяжение тела в состоянии плоской деформации. На первом этапе проводится растяжение (ориентационная вытяжка) в направлении (3). Если при последующем растяжении в направлении





Фиг. 5

(1) траектория деформирования пересекает границу зоны ФП, то оказывается возможной «переориентация» — расслоение на фазы со скачкообразным увеличением  $\lambda_1$ .

*Замечание.* В пространственном случае, когда  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) упорядочены по величине, условие

$$\lambda_2 \in [\lambda_1, \lambda_3] \quad (5.46)$$

является дополнительным ограничением при построении зоны ФП. В зависимости от соотношения между величинами  $\lambda_2$  и  $J^{1/3}$  условие (5.46) по-разному ограничивает гиперболы  $\lambda_1 \lambda_3 = J/\lambda_2$  (фиг. 5). Зона ФП содержит те части гипербол, для которых  $\lambda_3 \geq \max \{Y, R^{1/2}\}$ , если  $\xi > 1$ ;  $\lambda_1 \leq \min \{X, R^{1/2}\}$ , если  $\xi < 1$ ;  $Y = \lambda_2$ ,  $X = J/\lambda_2^2$ , если  $\lambda_2 > J^{1/3}$ ;  $Y = J/\lambda_2^2$ ,  $X = \lambda_2$ , если  $\lambda_2 < J^{1/3}$ .

Таким образом зона ФП для пространственного случая может быть построена по зоне ФП для плоской деформации путем сужения области допустимых значений  $\lambda_1$ . Полагая, что в окрестности

$$\Phi = \Phi_c + a_1 (J - J_c) - 1/2 a_2 (J - J_c)^2 + 1/4 a_4 (J - J_c)^4 \quad (5.47)$$

$$\Phi_c = \Phi(J_c), \quad a_1 = \Phi'(J_c), \quad a_2 = -\Phi''(J_c) > 0, \quad a_4 = \Phi^{IV}(J_c)$$

из (5.8) получим

$$J - J_c = J_c - J_+ \quad (5.48)$$

Тогда

$$u(J) = a_2 - a_4 (J - J_c)^2 \leq a_2$$

$$R(J, \lambda_2) = \lambda_2^2 \{1 - (J - J_c)^2/b\}$$

$$\lambda_2^2 (\lambda_2) = (C\lambda_2^{-2} + D)/b(\lambda_2), \quad b(\lambda_2) = A - D\lambda_2^{-2}$$

$$A = a_2/a_4, \quad C = c/a_4, \quad D = d/a_4$$

Из требования ненапряженности и эллиптичности натурального состояния следуют дополнительные ограничения на параметры потенциала:  $\alpha = A(1 - J_c) - (1 - J_c)^3 - (C + 2D)$ ,  $\alpha = a_1/a_4$ ,  $C + 2D + 3(1 - J_c)^2 - A > 0$ . Из (5.37) следуют необходимые ограничения на  $\lambda_2$  и  $J$ :

$$\lambda_2^2 > D/A, \quad |J - J_c| < (A - D\lambda_2^{-2})^{1/2} < A^{1/2} \quad (5.49)$$

Границы зоны ФП определяются уравнениями

$$J = J_c \pm \kappa^{1/2} (\lambda_2, \lambda_n), \quad n = e_p \quad (\alpha, \beta = 1, 3)$$

и легко могут быть построены по формулам

$$\lambda_\alpha = \lambda_2^{-1} \lambda_\beta^{-1} (J_c \pm \kappa^{1/2} (\lambda_2, \lambda_\beta)), \quad n = e_\alpha \quad (5.50)$$

$$\kappa (\lambda_2, \lambda_n) = (1 - \lambda_c^2 / \lambda_n^2) b (\lambda_2)$$

Границы эллиптичности определяются аналогично  $J = J_c \pm \kappa^{1/2} (\lambda_2, \lambda_3) / \sqrt{3}$ . Согласно (5.25) на траектории одномерных переходов по  $\lambda_1$ :

$$\sigma_1 = \lambda_1 \{c + d (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\} / (\lambda_2 \lambda_3) + \Phi' (J) \quad (5.51)$$

Разным  $\lambda_3$  соответствуют различные кривые  $\sigma_1 (\lambda_1)$ . Точки перегиба ( $J = J_c$ ) лежат на параболе  $\sigma_1 (J = J_c) = \{(c + d\lambda_2^2) / J_c\} \lambda_1^2 + dJ_c / \lambda_2^2 + a_1$ ,  $\lambda_1 \leq J_c / (\lambda_2 \lambda_c)$ . В критической точке  $\lambda_1 = J_c / (\lambda_2 \lambda_c)$ ,  $\sigma_1^c = (AJ_c + \alpha) a_4$ . Так как в силу (5.50):

$$[\lambda_1]^2 = \frac{4}{\lambda_3^2} \left(1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda_3^2}\right) \frac{b (\lambda_2)}{\lambda_2^2}$$

то при увеличении  $\lambda_3$  скачок  $[\lambda_1]$  возрастает при  $\lambda_c \leq \lambda_3 \leq \sqrt{2} \lambda_c$  и убывает при  $\lambda_3 > \sqrt{2} \lambda_c$ . Сечения зоны ФП и зависимости (5.51) соответствуют изображенным на фиг. 4.

Отметим, что потенциал (5.1), (5.47) может рассматриваться как модельный безотносительно предположения о близости  $J$  к  $J_c$ . При этом в силу (5.49) отклонение  $J$  от  $J_c$  в зоне ФП ограничено, а зоны фазовых переходов и неэллиптичности определяются четырьмя безразмерными параметрами  $J_c, A, C, D$ .

Авторы благодарят П. А. Жилина за критические замечания, высказанные при обсуждении данной работы на разных ее этапах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринфельд М. А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824—827.
2. James R. D. Finite deformation by mechanical twinning // Arch. Rat. Mech. Anal. 1981. V. 77. No. 2. P. 143—177.
3. Gurtin M. E. Two-phase deformation of elastic solids // Arch. Rat. Mech. Anal. 1983. V. 84. No. 1. P. 1—29.
4. Трускиновский Л. М. Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 306—310.
5. Кондауров В. И., Никитин Л. В. О фазовых переходах первого ряда в нелинейно-упругих средах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348—1351.
6. Гринфельд М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
7. Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. N. Y.—London: Academic Press, 1961. 375 с.
8. Губбс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
9. Knowles J. K., Sternberg E. On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics // J. of Elasticity. 1978. V. 8. No. 4. P. 329—379.
10. Abeyaratne R. Discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics of incompressible materials // J. of Elasticity. 1980. V. 10. No. 3. P. 255—293.
11. Abeyaratne R., Knowles J. K. Equilibrium shocks in plane deformation of incompressible elastic materials // J. of Elasticity. 1989. V. 22. No. 2. P. 193—200.

12. *Rosakis P.* Ellipticity and deformations with discontinuous gradients in finite elastostatics//Arch. Rat. Mech. Anal. 1990. V. 109. No. 1. P. 1—37.
13. *Eshelby J. D.* The elastic energy-momentum tensor//J. of Elasticity. 1975. V. 5. No. 4. P. 321—335.
14. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
15. *Кондауров В. И., Никитин Л. В.* Фазовые переходы первого рода в упруговязкопластической среде//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 130—139.
16. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Условия фазового равновесия в нелинейно-упругих средах с микроструктурой//Докл. АН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1052—1056.
17. *James R. D.* Co-existent phases in one-dimensional static theory of elastic bars//Arch. Rat. Mech. Anal. 1979. V. 72. No. 2. P. 99—140.
18. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
19. *Varley E., Day A.* Equilibrium phases of elastic materials at uniform temperature and pressure//Arch. Rat. Mech. Anal. 1966. V. 22. No. 4. P. 253—269.
20. *Зубов Л. М., Рудев А. Н.* Эффективный способ проверки условия Адамара для нелинейно-упругой сжимаемой среды//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 296—305.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
13.XII.1991