

УДК 539.3

© 1994 г. А. Б. ФРЕЙДИН, А. М. ЧИСКИС

**ЗОНЫ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ
В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ.**

**4.2. НЕСЖИМАЕМЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ
ТОЛЬКО ОТ ОДНОГО ИЗ ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ**

На основании общих соотношений, полученных в [1], рассматривается сосуществование двух фаз нелинейно-упругого изотропного несжимаемого материала с потенциалом, зависящим только от одного из инвариантов тензора деформаций. Равновесная граница фаз является поверхностью разрыва деформаций, на которой помимо кинематического (непрерывность поля перемещений) и силового (непрерывность усилия) условий выполняется энергетическое условие [2], (см. также библиографию в [1]) как дополнительное ограничение на возможные разрывные решения. Эти условия рассматриваются как система уравнений для определения нормали к поверхности разрыва деформаций и деформаций в одной из фаз в зависимости от деформаций в другой фазе. Деформации, при которых эта система имеет решение, образуют зону фазовых переходов (ФП).

Внутри зоны ФП решение имеет вид однопараметрического семейства за исключением случаев, когда однопараметричность исчезает вследствие кинематических ограничений как, например, в обсуждаемом в [3] случае плоской деформации. Расщепление системы уравнений позволяет выделить уравнение, связывающее инварианты тензора деформаций на скачке и, затем, построить однопараметрическое семейство нормалей к поверхности разрыва и вычислить соответствующие скачки реакции связи. Формулируются правила «рычага» и «энергетического равноудаления».

Однопараметричность решения исчезает на границе зоны ФП, являющейся поверхностью одномерных переходов по параметру сдвига. При этом нормаль к межфазной границе определяется величинами наибольшего и наименьшего удлинений, а граница раздела фаз локально совпадает с соответствующей плоскостью сдвига.

Рассматривается структура зоны ФП: соотношение с областью неэллиптичности, поверхности нулевого скачка, критические точки. В качестве примера рассмотрен потенциал Трелоара с изломом. Отмечается существование фундаментальных потенциалов, тождественно удовлетворяющих уравнению, связывающему деформационные инварианты на поверхности скачка.

1. Исходные соотношения. Вследствие непрерывности поля перемещений градиенты деформации F^\pm ($F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$, X и x (X) — векторы положения точки в отсчетной и актуальной конфигурациях) на границе фаз связаны условием Адамара (1.4)¹:

$$F^+ = (E + an) \cdot F^- \quad (1.1)$$

Скачок деформаций определяется диадой an , где a и n — векторы амплитуды скачка и нормали к поверхности разрыва деформации в актуальной конфигурации; E — единичный тензор. Знаками (\pm) обозначены величины по разные стороны границы фаз. Из (1.1) следует, что

$$B_+ = B_- + an \cdot B_- + B_- \cdot na + N_1 a a \quad (1.2)$$

¹ Звездочка означает ссылку на формулы ч. 1 [1].

где $B = F \cdot F^T$ — мера деформаций Фингера (левый тензор деформаций Коши — Грина), $N_k = n \cdot B^k \cdot n$ ($k \neq 0$ — целое) — ориентационные инварианты (индекс (-) при N_k не пишем: $N_k^- = N_k$); n однозначно определяется величинами любых двух N_k ($k = k_1, k_2$), если B задано. Отметим, что в случае несжимаемого материала в силу (2.11*) $N_1^+ = N_1$ (ср. с [3]).

Так как в случае несжимаемого материала $\det F = 1$, то согласно (1.1):

$$a \cdot n = 0 \quad (1.3)$$

а для скачков первого $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ и второго $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$ (λ_i — главные растяжения) инвариантов B согласно (1.2) и (2.10*) справедливы соотношения

$$[I_1] = 2a \cdot B_- \cdot n + N_1 a \cdot a, \quad [I_2] = a \cdot B_-^{-1} \cdot a - 2a \cdot B_-^{-1} \cdot n \quad (1.4)$$

(квадратными скобками обозначен скачок величины на границе фаз $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$).

Так как в случае нелинейно-упругого несжимаемого материала [4]:

$$T = -pE + G \quad (1.5)$$

где $G = G(F)$, то силовое (условие Пуассона) и энергетическое условия равновесия на границе фаз принимают вид [1]:

$$[p] = -n \cdot [G] \cdot n \quad (1.6)$$

$$\Pi \cdot [G] \cdot n = 0 \quad (1.7)$$

$$[W] = a \cdot G^\pm \cdot n \quad (1.8)$$

Здесь T — тензор напряжений Коши, p — реакция связи, W — потенциал, $\Pi = E - n n$ — проектор на поверхность разрыва.

Условия (1.7), (1.8) при учете (1.1), (1.3) образуют систему трех уравнений для определения четырех неизвестных, определяющих векторы n и $a \perp n$ в зависимости от деформаций в одной из фаз (далее — фазы (-)). Следовательно, решение имеет вид однопараметрического семейства. Скачки I_1 , I_2 и p вычисляются по формулам (1.4), (1.6). Градиенты деформации F , при которых система имеет решение, образуют зону фазовых переходов (ФП). В случае изотропного материала

$$G = \mu_1 B + \mu_{-1} B^{-1} \quad (1.9)$$

где $\mu_1 = 2W_1$, $\mu_{-1} = -2W_2$, W_α ($\alpha = 1, 2$) — производные потенциала $W(I_1, I_2)$ по I_α .

Из условия Пуассона для нормальной составляющей усилия (1.6) и (1.5), (1.9) следует зависимость (3.14*) скачка реакции от деформационных и ориентационных инвариантов

$$[p] = 2 [W_1] N_1 - 2 [W_2] N_{-1} - 2W_2^+ [I_2] \quad (1.10)$$

Условие Пуассона (1.7) для тангенциальной составляющей усилия принимает вид (3.15*):

$$W_1^+ N_1 a + W_2^+ \Pi \cdot B_-^{-1} \cdot a = -[W_1] t_t + [W_2] t_{-t} \quad (1.11)$$

($t_t = \Pi \cdot B_-^{-1} \cdot n$), а энергетическое условие (1.8) имеет вид (4.3*):

$$[W] = 2W_1^+ a \cdot B_- \cdot n - 2W_2^- a \cdot B_-^{-1} \cdot n \quad (1.12)$$

Рассмотрим далее несжимаемый материал с потенциалом

$$W = W(I) \quad (I = I_1 \text{ или } I_2) \quad (1.13)$$

Тогда

$$T = -pE \pm \mu B^{\pm 1} \quad (1.14)$$

где $\mu = 2W'$ — модуль сдвига, штрих означает производную по I , верхний и нижний из знаков (\pm) соответствуют случаям $I = I_1$ и $I = I_2$.

Из (1.13), (1.10) — (1.12) следуют выражения для скачка реакции

$$[p] = \begin{cases} 2 [W'] N_1, & \text{если } I = I_1 \\ -2 ([W'] N_{-1} + W_+' [I]), & \text{если } I = I_2 \end{cases} \quad (1.15)$$

амплитуды

$$a = \frac{\omega - 1}{N_1} \Pi \cdot B_- \cdot n \quad (\omega = W_-'/W_+') \quad (1.16)$$

(ср. с (3.15^{*}); полагаем $W_+' \neq 0$) и энергетического условия

$$[W] = \pm \mu a \cdot B^{\pm 1} \cdot n \quad (1.17)$$

Замечание. Если $W_+' = 0$, то (1.11) выполнимо при $W = W(I)$ только, если $[W'] = 0$ или $t_{\pm 1} = 0$, т. е. $W'(I_+) = W'(I_-) = 0$ или $n = e$. При этом согласно (1.12) $W(I_+) = W(I_-)$. Таким образом сосуществование с деформацией, в которой $W_+' = 0$, возможно только при немонотонной зависимости $W(I)$, причем обе величины I_- и I_+ определяются свойствами потенциала. В случае $W_+' = W_-' = 0$ имеем $T_+ = T_- = -pE$, нормаль неопределима. Во втором случае $T_+ = -p_+E$, $[p] = \mp 2W_-'\lambda_-^2$.

Из (1.16) следует

$$N_1 a \cdot a = -a \cdot B_- \cdot n [W'] / W_+', \quad a \cdot B_-^{-1} \cdot a = a \cdot B_-^{-1} \cdot n [W'] / W_+' \quad (1.18)$$

Подставив (1.18) в (1.4), получим

$$[I_1] = \frac{W_+' + W_-'}{W_+'} a \cdot B_- \cdot n, \quad [I_2] = -\frac{W_+' + W_-'}{W_+'} a \cdot B_-^{-1} \cdot n \quad (1.19)$$

Откуда после подстановки (1.16) при учете определения N_k следуют уравнения

$$[I] = (\omega^2 - 1) \begin{cases} (N_1^{-1} N_2 - N_1), & I = I_1 \\ (N_{-1} - N_1^{-1}), & I = I_2 \end{cases} \quad (1.20)$$

которые запишем в виде

$$L(N) = V(I_+, I_-), \quad V(I_+, I_-) \triangleq (\omega^2 - 1)^{-1} [I] \quad (1.21)$$

$$L(N) \triangleq \begin{cases} N_1^{-1} N_2 - N_1, & I = I_1 \\ N_{-1} - N_1^{-1}, & I = I_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

Отметим, что если $W_+' = W_-' \neq 0$, то в силу (1.11), (1.4) $a = 0$, $[I] = 0$.

Подчеркнем, что функция $L(N)$ не зависит от конкретного вида потенциала (1.13) и в этом смысле универсальна.

Теорема. Зона ФП в несжимаемом материале с потенциалом, зависящим только от одного из инвариантов, тензора деформаций, определяется совместным решением уравнения

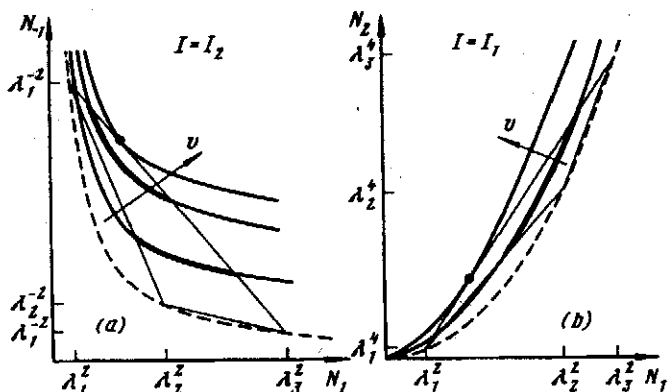
$$[W] = \frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+} [I] \quad (1.23)$$

связывающего I_- и I_+ , и неравенства

$$0 \leq V(I_+, I_-) \leq k^2 \quad (1.24)$$

$$k^2 = (\lambda_{\max}^{\pm 1} - \lambda_{\min}^{\pm 1})^2 \quad (1.25)$$

где λ_{\max} и λ_{\min} — наибольшее и наименьшее главные растяжения в одной из фаз, далее — в фазе (-).



Фиг. 1

Доказательство. Уравнение (1.23) следует из энергетического условия (1.17) и соотношений (1.19).

Наибольшее и наименьшее значения линейной по одному из N_k функции $L(N)$ достигается на границе области допустимых значений D ориентационных инвариантов N_k . На i - j -стороне треугольника D согласно (4.8*), (4.9*) и (1.22):

$$L = \lambda_i^{\pm 2} + \lambda_j^{\pm 2} - \lambda_i^{\pm 2} \lambda_j^{\pm 2} N_i^{\mp 1} - N_i^{\pm 1}, \quad 0 \leq L \leq L_{ij}$$

$$L_{ij} \triangleq L(N_i^*) = (\lambda_i^{\pm 1} - \lambda_j^{\pm 1})^2, \quad N_i^* = \lambda_i \lambda_j, \quad n_k = 0 \quad (1.26)$$

Наименьшее (нулевое) значение L принимает в вершинах треугольника, когда $n = e$, а наибольшее значение $L_{13} = (\lambda_3^{\pm 1} - \lambda_1^{\pm 1})^2$ при

$$N_1 = \lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2^{-1}, \quad n_2 = 0 \quad (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3) \quad (1.27)$$

когда нормаль лежит в главной плоскости B_- , соответствующей наибольшему и наименьшему растяжениям. Следовательно, уравнение (1.21) имеет решение на D , если и только если выполняется (1.24).

Отметим, что в случае (1.27), когда (1.24) выполняется как равенство

$$n_1^2 = \lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_3), \quad n_3^2 = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_3) \quad (1.28)$$

Из левой части (1.24) при $\mu_{\pm} > 0$ следует необходимость невыпуклости (книзу) потенциала $W(I)$ на отрезке $[I_-, I_+]$ — меньшему значению инварианта на поверхности разрыва соответствует большее значение модуля сдвига.

Если решение уравнения (1.23) имеет несколько ветвей, зона ФП строится для каждой ветви.

Так как при $J = 1$ ($J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$):

$$I = \lambda_1^{\pm 2} + \lambda_2^{\pm 2} + \lambda_3^{\pm 2} \quad (1.29)$$

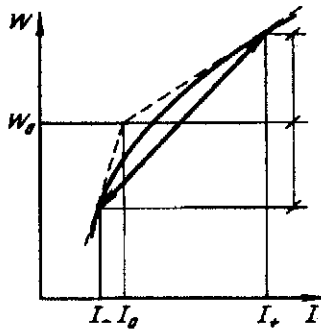
то зона ФП для случая $I = I_2$ может быть построена по зоне ФП для случая $I = I_1$ (при той же зависимости $W(I)$) в результате инверсии $\lambda_1 \rightarrow \lambda_1^{-1}$.

В случае плоских скачков, например, в плоскости e_1, e_3 , величины λ_{\min} и λ_{\max} в (1.25) заменяются на λ_1 и λ_3 ; $\lambda_2 = \lambda$ — параметр плоской деформации — не обязательно промежуточное по величине главное растяжение.

Подставив решение уравнения (1.23) $I_+ = I_+(L)$ в (1.21), приходим к уравнению

$$L(N) = v(I), \quad v(I) \triangleq V(I_+(I), I) \quad (1.30)$$

определяющему при учете D однопараметрическое семейство нормалей, которому соответствует постоянное I_+ , определяемое из (1.23) и однопараметрические



Фиг. 2

семейства $[p]$ и a , определяемые согласно (1.15) и (1.16). Управляющая функция $v(I)$ определяется видом потенциала и решением уравнения (1.23).

При $I = I_1$ (1.30) задает на плоскости N_1, N_2 параболу $N_2 = N_1^2 + vN_1$, а при $I = I_2$ — гиперболу $N_{-1} = N_1^{-1} + v$ на плоскости N_1, N_{-1} которые являются смещенными скелетными кривыми [1] и при изменении v пересекают три, две, одну стороны треугольника D , касаются извне стороны 1—3 (при выполнении (1.27)) и, наконец, оказываются вне D (фиг. 1).

Пересечение с i — j -стороной (плоский скачок) происходит если и только если $0 < v(I) < L_{ij}$, причем обязательно в двух точках. При $v(I) = L_{ij}$ линия (1.30) касается i — j -стороны. Существование в главной плоскости B двух различных ориентаций поверхности разрыва (в отличие, например, от материала Адамара [1]) связано с поведением универсальной функции L . Этот факт остается в силе и для случая плоской деформации произвольного изотропного несжимаемого материала (ср. с [3]), поскольку для плоской деформации вместо потенциала $W(I_1, I_2)$ всегда можно рассматривать эквивалентный эффективный потенциал $W(I)$ [4].

Энергетическое условие имеет простую геометрическую интерпретацию. Касательные к кривой $W(I)$ в точках I_- и I_+ пересекаются в точке

$$I_0, W_0: W_0 - W_{\pm} = W_{\pm}'(I_0 - I_{\pm}) \quad (W_0 = W(I_0)) \quad (1.31)$$

Из (1.23), (1.31) следует правило рычага:

$$W_{-}'(I_- - I_0) = W_{+}'(I_0 - I_+) \quad (1.32)$$

(отстояние величин I_- и I_+ от I_0 обратно пропорционально модулям сдвига), равносильное правилу энергетического равноудаления: $W_+ - W_0 = W_0 - W_-$ (фиг. 2).

2. Построение зоны ФП. Зона ФП является двумерной областью на поверхности несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Вследствие изотропий достаточно провести построение при

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \quad (2.1)$$

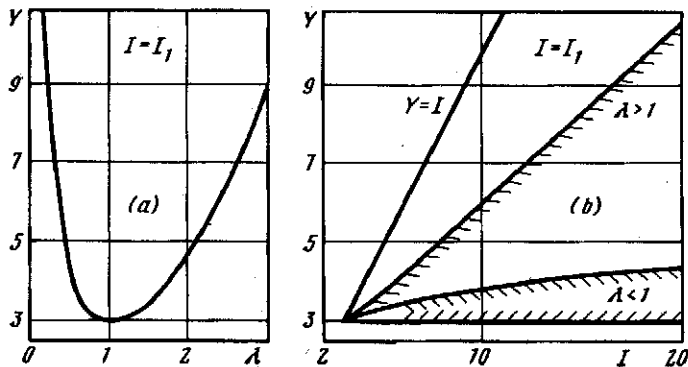
Выберем координаты, в которых зона ФП строится особенно просто. Из (1.25), (1.29) следует, что

$$k^2 = I - Y, \quad Y = \lambda_2^{\pm 2} + 2\lambda_2^{\mp 1} \geq 3 \quad (2.2)$$

Тогда (1.24) принимает вид

$$0 \leq v(I) \leq I - Y \quad (2.3)$$

Нелинейное по I равенство (2.3) в явном виде разрешимо относительно Y , что позволяет сформулировать



Фиг. 3

Утверждение 1. Зона ФП на плоскости I, Y определяется соотношениями

$$3 \leq Y \leq r(I) \quad (2.4)$$

$$r(I) \leq I \quad (2.5)$$

$$r(I_+, I) \triangleq I - V(I_+, I) = [\mu^2 I] / [\mu^2] = r(I, I_+) \quad (2.6)$$

$$r(I) \triangleq r(I_+, (I), I) = I - v(I)$$

Из (2.6) следует, что

$$r(I_+) = r(I) \quad (2.7)$$

Определим область изменения переменных I, Y (фиг. 3). Из (2.2) следует

$$3 \leq Y \leq I \quad (2.8)$$

где $Y=3$ при $\lambda_2 = 1$; $Y=I$ при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ в пространственном случае или при $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$, если $\lambda_2 = \lambda$ — параметр плоской деформации. В то время как между точками поверхности несжимаемости и координатами I, λ_2 имеется взаимнооднозначное соответствие ($\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2^{-1}$, $\lambda_1^{\pm 2} + \lambda_3^{\pm 2} = I - \lambda_2^{\pm 2}$), каждой точке I, Y соответствуют две точки I, λ_2 со значениями $\lambda_2 < 1$ и $\lambda_2 > 1$ (фиг. 3, а). В случае плоской деформации $\lambda_2 \neq \lambda$, следовательно Y — заданы. В пространственном случае необходимо $\lambda_2 \in [\lambda_1, \lambda_3]$, что приводит к сужению области изменения Y :

$$3 \leq Y \leq y(I) \quad (2.9)$$

где зависимость $y(I)$ соответствует границам сектора (2.1) и задается параметрически (фиг. 3, в):

$$y = \lambda^{\pm 2} + 2\lambda^{\mp 1}, \quad I = 2\lambda^{\pm 2} + \lambda^{\mp 4} \quad (2.10)$$

где $\lambda = \lambda_1$ или λ_3 , если $\lambda_2 < 1$ или $\lambda_2 > 1$ соответственно (например, если $\lambda_2 = \lambda_1$, то $\lambda_3 = \lambda_1^{-2}$, откуда следует второе из соотношений (2.10)).

Таким образом, для построения зоны ФП в координатах достаточно определить одну функцию $r(I)$ и учесть область изменения I, Y . Зоны пространственных скачков могут быть построены по законам ФП при плоской деформации путем соответствующего сужения области изменения I, Y .

Замечание. Границы области изменения I, Y лишь ограничивают график $r(I)$. На линиях (2.10) происходит стыковка секторов с различным упорядочением λ . Луч $Y=3, I \geq 3$ — следствие определения Y и I . Если область (2.4) лежит внутри (2.8), то (2.5) выполняется автоматически.

3. Пары подзон ФП. Правило Максвелла. Хотя процедура, предложенная в

п. 2, полностью решает задачу построения зоны ФП, представляет интерес рассмотрение зоны ФП, основанное на использовании традиционно обсуждаемой [3, 5] зависимости напряжения сдвига от параметра сдвига.

Поскольку в случае деформаций обобщенного простого сдвига в плоскости X_1, X_3 с ортами i_1, i_3 :

$$x_1 = \lambda^{-1/2} (X_1 + k_0 X_3), \quad x_3 = \lambda^{-1/2} X_3, \quad x_2 = \lambda X_2$$

$$B = \lambda^{-1} \{ (1 + k_0^2) i_1 i_1 + k_0 (i_1 i_3 + i_3 i_1) + i_3 i_3 \} + \lambda^2 i_2 i_2 \quad (3.1)$$

$$I_1 = \lambda^{-1} k_0^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1} = \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda^2$$

то с учетом условия несжимаемости

$$\lambda^{-1} k_0^2 = (\lambda_1 - \lambda_3)^2 = \lambda^2 (\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1}) \quad (3.2)$$

Из (1.25) и (3.1) следует, что параметр $k = \lambda^{\mp 1/2} k_0$ может быть назван коэффициентом сдвига. Ему соответствует

$$\tau \stackrel{\Delta}{=} W_k = \mu k (W_k = \partial W (k^2 + Y) / \partial k) \quad (3.3)$$

причем в силу (1.14), (3.1) в случае плоской деформации $T_{13} = \lambda^{\mp 1/2} \tau$; если $\lambda = 1$, то τ — напряжение сдвига.

Положим

$$I_A = \min (I_-, I_+), \quad I_B = \max (I_-, I_+) \quad (3.4)$$

Тогда согласно (1.24) и (2.4) в подзонах ФП $A = \{I_A, Y_A\}$, $B = \{I_B, Y_B\}$:

$$\mu_A^2 > \mu_B^2 \quad (3.5)$$

$$Y_A \leq r, \quad Y_B \leq r (r = r(I_A) = r(I_B)) \quad (3.6)$$

Неравенства (3.5), (3.6) равносильны условию

$$\mu_A^2 (I_A - Y) = \mu_B^2 (I_B - Y) \quad (3.7)$$

где $Y = Y_A$ или Y_B .

Действительно, согласно (3.6), (2.6) и (3.5) $\mu_A^2 I_A - \mu_B^2 I_B > Y (\mu_A^2 - \mu_B^2)$, откуда следует (3.7).

Если $Y = Y_A$, то, поскольку согласно (2.8) $I_A > Y_A$, из (3.7) следует (3.5):

$$\mu_A^2 / \mu_B^2 \geq (I_B - Y_A) / (I_A - Y_A) > 1 \quad (3.8)$$

Если $Y = Y_B$, то, аналогично,

$$\mu_B^2 / \mu_A^2 \leq (I_A - Y_B) / (I_B - Y_B) < 1 \quad (3.9)$$

В свою очередь, из (3.7) — (3.9), (2.6) следует (3.6).

Условие (3.7) имеет ясный механический смысл, означая согласно (2.2), (3.3), что

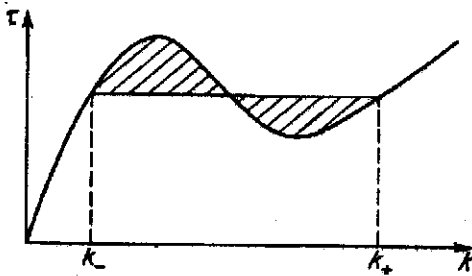
$$\tau^2 (I_A, Y) \geq \tau^2 (I_B, Y), \quad \text{если } I_A < I_B \quad (3.10)$$

или, в переменных k, Y :

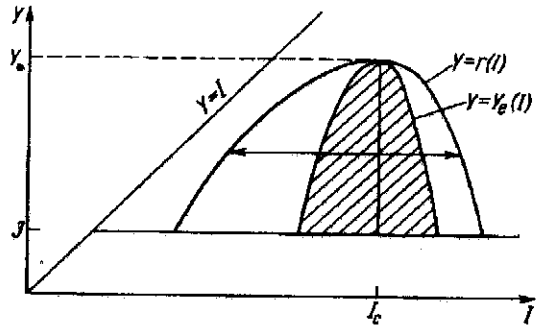
$$\tau^2 (k_A, Y) \geq \tau^2 (k_B, Y), \quad \text{если } k_A^2 < k_B^2 \quad (3.11)$$

В случае обобщенной плоской деформации $Y_A = Y_B = Y$; τ пропорционально напряжению сдвига. При произвольном деформированном состоянии τ формально определено равенством (3.3). Итак, доказано.

Утверждение 2. Зона ФП определяется совместным решением неравенства (3.11) и уравнения (1.23) при учете (2.9).



Фиг. 4



Фиг. 5

Отметим, что в п. 2 рассматривались сечения зоны ФП линиями $l = \text{const}$, в п. 3 — линиями $Y = \text{const}$.

Неравенства (1.24) \Leftrightarrow (3.5), (3.6) \Leftrightarrow (3.7) \Leftrightarrow (3.11) безотносительно энергетического условия (1.23) являются различными представлениями необходимых и достаточных условий существования в материале (1.13) поверхности разрыва деформаций, на которой выполняются условия Пуассона и Адамара; (3.11) означает немонотонность зависимости $\tau(k)$ (если $\tau(k) > 0$ имеет участок возрастания) и было получено для случая плоской деформации $\lambda = 1$ несжимаемого материала в [3, 5].

На границе зоны ФП $Y = r(l)$ векторы \mathbf{n} и $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ лежат в 1-3 — главной плоскости \mathbf{V}_- . Нетрудно показать, что в базисе $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_2$ (где \mathbf{n} определено соотношениями (1.28), $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$ — единичный вектор в 1-3 — главной плоскости: $\boldsymbol{\tau}_1 = -n_3, \boldsymbol{\tau}_3 = n_1$) тензор \mathbf{V}_- имеет вид (3.1):

$$\mathbf{V}_- = \lambda_2^{-1} \{ \mathbf{nn} + (1 + k_0^2) \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau} \pm k_0 (\mathbf{n}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}) \} + \lambda_2^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.12)$$

где $k_0 = \lambda_2^{1/2} (\lambda_3 - \lambda_1)$, знаки (\pm) соответствуют случаям $n_1, n_3 \gtrless 0$. Тогда в силу (1.16), (1.27):

$$\mathbf{a} = \pm (\omega - 1) k_0 \boldsymbol{\tau} \quad (3.13)$$

Подставив (3.12), (3.13) в (1.2), получим

$$\mathbf{V}_+ = \lambda_2^{-1} \{ \mathbf{nn} + (1 + k_0^2) \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau} \pm k_0 (\mathbf{n}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}) \} + \lambda_2^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.14)$$

$$k_{0+} = \omega k_{0-} \quad (3.15)$$

откуда следует, что тензоры \mathbf{V}_- и \mathbf{V}_+ на границе зоны ФП отличаются только величиной параметра сдвига; $\mathbf{a} = \pm [k_0] \boldsymbol{\tau}$, межфазная граница является плоскостью сдвига (такие скачки названы в [3] нормальными). Это позволяет строить границу зоны ФП, используя правило Максвелла для одномерных переходов по параметру k .

Действительно, так как $W_k^{\pm} = \mu_{\pm} k_{\pm}$, то из (3.15) следует уравнение

$$W_k^- = W_k^+ \Leftrightarrow \tau(k_-, Y) = \tau(k_+, Y) \quad (3.16)$$

означающее равенство касательных усилий на поверхности разрыва при переходах на границе зоны.

Подставляя (3.16) в (1.23) и учитывая, что для переходов на границе зоны $[Y] = 0, [l] = [k^2]$, получим

$$[W] = W_k^- [k] \quad (3.17)$$

Уравнения (3.16), (3.17) определяют величины k_- и k_+ и могут быть записаны в стандартном виде соотношений Максвелла

$$[W]/[k] = W_k^- = W_k^+$$

означающих правило равных площадей на графике зависимости $\tau(k)$ (фиг. 4). Определив k_- и k_+ из соотношений Максвелла как функции Y , можно далее согласно (2.2) строить зону в координатах I, Y . Такая процедура альтернативна построению с помощью неравенств (2.4)

4. Линии нулевого скачка и эллиптичности. Инварианты I_- и I_+ входят в (1.23) симметрично, поэтому любая ветвь решения уравнения (1.23) симметрична на плоскости I_-, I_+ относительно прямой $I_+ = I_-$. Линии нулевого скачка на поверхности несжимаемости соответствует пересечение этой ветви с прямой $I_+ = I_-$ при $I_- = I_c$. Величина I_c определяется из требования существования нетривиального нулевого решения уравнений (1.23), (1.21). Считая $W(I)$ представимой в виде ряда Тейлора, получим из (1.23), (2.6):

$$\left(\frac{1}{3}\mu'' - \frac{\mu^2}{\mu}\right) [I]^3 + \left(\frac{1}{6}\mu''' - \frac{\mu'\mu''}{\mu} + \frac{\mu^3}{2\mu^2}\right) [I]^4 + \dots = 0 \quad (4.1)$$

$$r(I, I_+) = I + \frac{\mu}{2\mu'} + \frac{3}{4\mu'^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\mu\mu''\right) [I] + \dots \quad (4.2)$$

Из (4.1), (4.2) следует, что рассмотрение малых скачков требует учета в разложении $W(I)$ слагаемых не ниже четвертого порядка, а решение $I_+ = I_- = I_c$ имеет место, если

$$\mu_c^2 - \frac{1}{3}\mu_c\mu_c'' = 0 \quad (4.3)$$

$$Y \leq r(I_c) = I_c + \mu_c/2\mu_c', \quad \mu_c/\mu_c' \leq 0 \quad (4.4)$$

($\varphi_c = \varphi(I_c)$). При $\mu_c' \neq 0$ (4.3) равносильно

$$(\mu/\mu')'_c = -2 \quad (4.5)$$

Соотношения (4.3), (4.4) определяют внутреннюю границу между подзонами ФП.

Поскольку согласно (2.7) величина r не меняется при ФП, I_c является точкой локального максимума или минимума непрерывной $r(I)$ безотносительно разложимости $W(I)$ в ряд Тейлора.

Используя соотношения [4], нетрудно показать, что локальные условия сильной эллиптичности (выполнимости неравенства Адамара, положительности квадратов скоростей плоских волн) в координатах I, Y имеют вид

$$\mu > 0, \quad \mu + 2(I - Y)\mu' > 0 \quad (4.6)$$

или

$$\{\mu > 0, \partial^2(I, Y)/\partial I^2 > 0\} \Leftrightarrow \{\mu > 0, \partial\tau(k, Y)/\partial k > 0\} \quad (4.7)$$

так как согласно (3.3), (2.2):

$$\partial^2(I, Y)/\partial I^2 = \mu(\mu + 2\mu'k^2), \quad \partial\tau(k, Y)/\partial k = \mu + 2\mu'k^2 \quad (4.8)$$

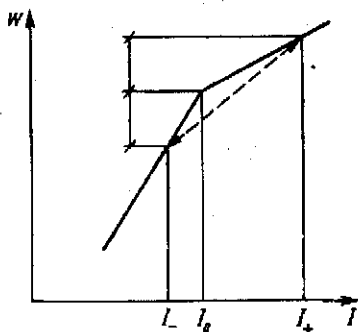
Условие эллиптичности в виде $d\tau(k)/dk > 0$ было сформулировано в [5] для случая плоской деформации. Из (3.10), (4.6) следует, что отрезок $\{[I_A, I_B], Y = \text{const} \in [3, r(I_A)]\}$ необходимо пересекает область неэллиптичности (неустойчивости).

Точку (I_*, Y_*) границы области неэллиптичности

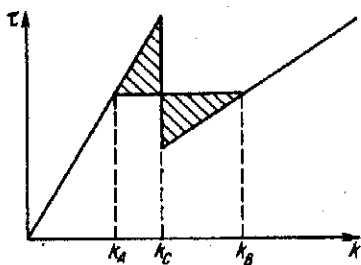
$$Y_* = I + \mu/(2\mu'), \quad \mu > 0 \quad (4.9)$$

в которой $Y_*'(I) = 0$, назовем критической. Дифференцируя (4.8), получим

$$(\mu/\mu')'_{I_*} = -2, \quad Y_* = Y_c(I_*) \quad (4.10)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

В критической точке

$$\partial \tau(k, Y_*) / \partial k = 0, \quad \partial^2 \tau(k, Y_*) / \partial k^2 = 0 \quad (4.11)$$

Первое условие следует непосредственно из (4.8), (4.9). Второе — из (4.8) — (4.10). Соотношения (4.11) аналогичны зависимости давления и объема в критической точке для фазовых переходов «газ — жидкость»; при этом Y_* играет роль «критической температуры».

Из (4.5) и (4.10), (4.4) и (4.9) и условий (4.6) следует соответственно, что: точка ветвления нулевого решения уравнения (1.23) совпадает с абсциссой критической точки

$$I_* = I_c \quad (4.12)$$

ордината критической точки

$$Y_* = r(Y_c) \quad (4.13)$$

линия нулевого скачка есть отрезок $\{I = I_c, 3 \leq Y \leq Y_*\}$, лежащий внутри области неэллиптичности и ограниченный критической точкой.

Подчеркнем, что разрывы деформации бесконечно малой амплитуды при условии сохранения эллиптичности по обе стороны разрыва возможны в материалах с непрерывным дифференцируемым потенциалом только в окрестности критической точки.

Рассмотрим далее характерные особенности зоны ФП, когда в сосуществующих деформациях может сохраняться эллиптичность. Дифференцируя уравнение (1.23), можно показать, что

$$dI_+ / dI_- = -\zeta_- / \zeta_+, \quad \zeta = \mu + 2\mu' V(I_+, I) \quad (4.14)$$

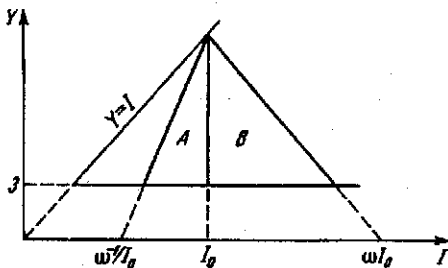
Из (1.24) и (4.6) следует, что, если на поверхности разрыва выполнены условия Пуассона и Адамара, а деформация V_- удовлетворяет условиям эллиптичности, то $\zeta_- > 0$ (если $\zeta_- < 0$, то условия (4.6) в V_- не удовлетворяются). Знак ζ_+ и эллиптичность в V_+ связаны аналогично, откуда следует

Утверждение 3. Если сосуществующие деформации удовлетворяют условиям эллиптичности, то $dI_+ / dI_- < 0$.

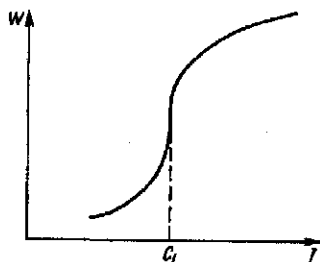
Так как согласно (2.6) $\partial r(I_+, I_-) / \partial I_{\pm} = \pm \mu_{\pm} \zeta_{\pm} / [\mu^2]$, то с учетом (4.14) $dr / dI_- = -\zeta_- / [\mu]$. Следовательно, если на поверхности разрыва деформация V_- удовлетворяет условиям эллиптичности, то $dr / dI_- \geq 0$, если $I_- \leq I_+$ соответственно, откуда следует

Утверждение 4. Если на границе зоны ФП $Y = r(I)$ деформация удовлетворяет условиям эллиптичности, то

$$dY / dI_- \geq 0, \quad \text{если } I_- \leq I_+ \quad (4.15)$$



Фиг. 8



Фиг. 9

Качественный вид зоны ФП, при которых возможно сохранение эллиптичности по обе стороны поверхности разрыва деформаций вплоть до скачков нулевой амплитуды, представлен на фиг. 5. Заштрихована область неэллиптичности.

5. Пример. Рассмотрим потенциал Трелоара с невыпуклым изломом (фиг. 6)

$$W = \begin{cases} \mu_1 (I - 3)/2, & I \in [3, I_0] \\ (\mu_2 (I - I_0) + \mu_1 (I_0 - 3))/2, & I \in (I_0, \infty) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\mu_1 > \mu_2 > 0, \quad I_0 > 0$$

Зависимость $I_+(I)$ определим, используя правило рычага (1.32)

$$I_+ = I_0 + \omega (I_0 - I_-) \quad (I_- < I_0, \omega = \mu_1/\mu_2) \quad (5.2)$$

откуда следует, что критическая точка $I_c = I_0$.

Однопараметрическое семейство нормалей согласно (1.30), (5.2) определяется уравнением $L(N) = (I_0 - I_-)/(\omega - 1)$.

Согласно (3.3) $\tau = \mu k$, где $\mu = \mu_1$ или μ_2 , когда $k \in [0, k_c]$ или $k > k_c$ соответственно; $k_c^2 = I_c - Y$. Используя правило равных площадей Максвелла (фиг. 7), получим, что на границе зоны ФП $k_A = \omega^{-1/2} k_c$, $k_B = \omega^{1/2} k_c$ ($I_A \leq I_B$), откуда с учетом (2.2) следуют уравнения границ подзон A и B в координатах I, Y (фиг. 8):

$$I_A = (1 - \omega^{-1}) Y + \omega^{-1} I_c, \quad I_B = (1 - \omega) Y + \omega I_c$$

При монотонном изменении τ ФП становится впервые возможным при $\tau = (\mu_1 \mu_2)^{1/2} (I_c - Y)^{1/2}$.

Зона неустойчивости вырождается в отрезок $\{I = I_c, Y \in [3, I_c]\}$ — внутреннюю границу между подзонами A и B.

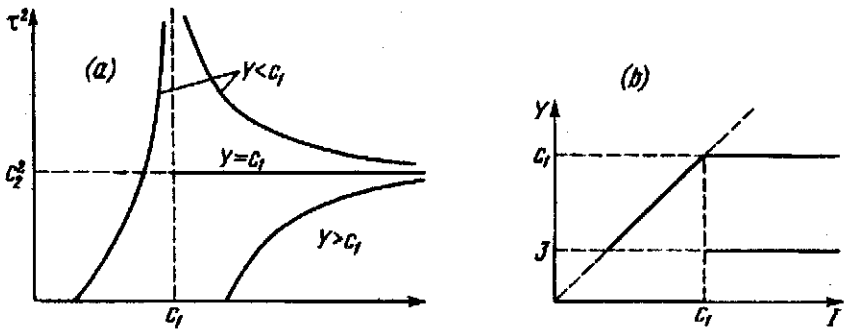
Отметим, что критическая точка $(I_c, Y = I_c)$ недостижима в случае пространственных скачков из-за сужения области изменения I, Y вследствие упорядочения λ_i (см. п. 2).

6. О фундаментальных потенциалах. Потенциалы $W(I)$, удовлетворяющие при любых I и I_+ уравнению (1.23), связывающему деформационные инварианты по обе стороны равновесного разрыва, назовем фундаментальными и будем строить их, рассматривая (1.23) как функциональное уравнение для определения $W(I)$. Зона ФП в этом случае определяется только неравенством (1.24) (или (3.10)).

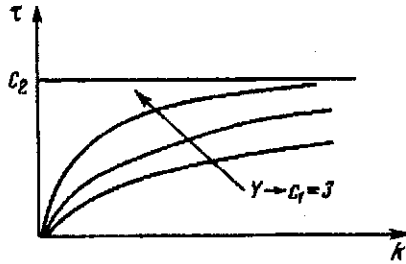
Поскольку (4.1) должно выполняться для любых I и сколь угодно малых $[I]$, $W(I)$ необходимо удовлетворяет уравнению (4.3) при $\forall I$. Очевидно, что потенциал, для которого $W' = \text{const}$, т. е. $W = AI + B$, удовлетворяет условиям (1.23) и (4.3), но в силу (1.20) допускает только нулевые скачки I .

В случае $\mu \neq \text{const}$, интегрируя (4.5), получим

$$\mu^2 = c_2^2 |I - c_1|^{-1} \quad (6.1)$$



Фиг. 10



Фиг. 11

откуда при $\mu > 0$ следует, что

$$W = \frac{1}{2} \int \mu dI = \begin{cases} -c_2 (c_1 - I)^{1/2} + c_3, & \text{если } I < c_1 \\ c_2 (I - c_1)^{1/2} + c_3, & \text{если } I > c_1 \end{cases} \quad (6.2)$$

$$(6.3)$$

где $c_1, c_2 > 0, c_3$ — константы интегрирования (параметры потенциала).

Нетрудно проверить, что (6.2), (6.3) удовлетворяют уравнению (1.23), причем обе точки I_+, I_- лежат слева или справа от точки $I = c_1$. Следовательно, построенный потенциал (фиг. 9) является фундаментальным. При этом $V(I_+, I) = I - c_1$ — не зависит от I_+ , а зона ФП, определяемая неравенствами (1.24) $0 < I - c_1 \leq I - Y$ есть полуполоса

$$I > c_1, \quad 3 \leq Y \leq c_1 \quad (6.4)$$

(ФП возможны только на ветви (6.3)).

Из (3.3), (2.2) и (2.6) следует, что

$$\tau^2(I, Y) = c_2^2 (I - Y) / |I - c_1| \quad (6.5)$$

Зависимость τ^2 от I для разных соотношений Y и c_1 представлена на фиг. 10. Очевидно, что неравенство (3.10) также определяет полуполосу (6.4), которая в силу (4.7) является одновременно зоной неэллиптичности.

Положим $c_1 = 3$. Тогда

$$W = c_2 (I - 3)^{1/2} + c_3, \quad \tau = \mu k = c_2 (k^2 + Y - 3)^{-1/2} k \quad (6.6)$$

Зона ФП сжимается в линию

$$Y = 3, \quad I > 3 \quad (6.7)$$

на которой материал ведет себя как идеально пластический (фиг. 11): $\tau = c_2 \operatorname{sgn} k$. Линии (6.7) соответствуют шесть криволинейных лучей

$\lambda_i = 1, \lambda_j \lambda_k = 1$ на поверхности несжимаемости. Согласно (1.28) любые две точки на таком луче могут быть соединены плоским скачком с нормалью $n_j^2 = (1 + \lambda_j^2)^{-1}, n_i = 0$.

Вклеивая тем или иным образом фрагменты фундаментального потенциала в выпуклые зависимости $W(I)$ можно получать различные упругопластические зависимости $\tau(k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрейдлин А. Б., Чискис А. М. Зоны фазовых переходов в нелинейноупругих изотропных материалах. Ч. 1. Основные соотношения // Изв. АН. МТТ. 1994. № 4. С. 91—109.
2. Гринфельд М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
3. Abeyaratne R., Knowles J. K. Equilibrium shocks in plane deformations of incompressible elastic materials // J. Elasticity. 1989. V. 22. No. 2. P. 193—200.
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Abeyaratne R. Discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics of incompressible materials // J. Elasticity. 1980. V. 10. No. 3. P. 255—293.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
13.XII.1991