

УДК 539.3

РАВНОВЕСНЫЕ ДВУХФАЗНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ЗОНЫ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

© А. Б. Фрейдлин, Л. Л. Шарипова

If phase transitions take place in some parts of a deformable body, phase boundaries can be considered as surfaces across which the deformation gradient suffers a jump and displacements are continuous. On the equilibrium interface a thermodynamic condition has to be put in addition to conventional displacement and traction continuity conditions. The thermodynamic condition can be satisfied not at any deformation on the interface. The deformations which can coexist on the equilibrium phase boundary form the phase transition zone (PTZ). The PTZ boundary acts as a yield surface or phase diagram in strain-space. In this paper a procedure for the PTZ construction is developed by a small strain approach. It is demonstrated that different types of strain localization due to phase transformation are possible on different loading paths. Depending on material parameters, the PTZ can be closed or unclosed. The last means that phase transitions are impossible on some deformation paths. A model of phase transformation due to multiple appearance of new phase layers is developed. Paths of transformation are related with the PTZ. Average stress-strain diagrams on the path of transformation are constructed. Effects of internal stresses induced by new phase areas and the anisotropy of a new phase are discussed.

Введение

В данном подходе при описании ФП используются следующие соображения.

1. Граница фаз упругого материала рассматривается как поверхность разрыва деформаций при непрерывном поле перемещений.

2. На равновесной границе фаз, помимо обычных кинематического (сохранения сплошности) и силового (непрерывности усилия) ставится дополнительное термодинамическое условие — аналог равенства химических потенциалов при равновесии фаз в теории Гиббса [1, 2, 3, 4, 5]. Термодинамическое условие является дополнительным ограничением на возможные разрывные решения.

3. Равновесные границы фаз могут возникать не во всех материалах. Подобно тому как в классической теории ФП расслоение на фазы связано с существованием в пространстве параметров состояния недостижимых областей неустойчивости материала, возникновение в упругом теле равновесного разрывного поля деформаций требует существования в пространстве деформаций областей неэллиптичности материала [6], в которых нарушается неравенство Адамара - необходимое условие устойчивости по отношению к бесконечно малым деформациям [8]. Требование неэллиптичности материала делает невозможным описание ФП в рамках традиционного приближения малых деформаций, когда плотность свободной энергии является непрерывно дифференцируемой квадратичной функцией линейного тензора деформаций. Вместе с тем ФП во многих материалах связаны именно с малыми деформациями. Как показано в работах [14, 15], в этом случае зависимость плотности свободной энергии от деформаций должна моделироваться набором квадратичных зависимостей. При этом область неэллиптичности

материала вырождается в поверхность разрыва производных (излома) плотности энергии.

4. Система условий равновесия на границе фаз может быть удовлетворена не при всех деформациях и не всех ориентациях границы. Это обстоятельство приводит к понятию *зоны фазовых переходов* [11].

Определение. *Зона фазовых переходов (ФП) - область в пространстве деформаций, деформации из которой могут сосуществовать на равновесной границе фаз.*

Важность построения зоны ФП состоит в том, что:

— Деформации вне зоны ФП не могут оказаться на границе фаз ни при каких условиях нагружения. Граница зоны ФП определяется исключительно свойствами материала и играет роль фазовой диаграммы или предельной поверхности пластичности в пространстве деформаций.

— Различные точки границы зоны ФП соответствуют различным видам деформированного состояния. С другой стороны, различным точкам границы зоны ФП соответствуют различные ориентации границы фаз по отношению к тензору деформаций и различные скачки деформаций [11, 13, 15, 18]. Поэтому построение зоны ФП означает исследование влияния вида деформированного состояния на тип локализации деформаций вследствие фазовых превращений.

Зона ФП является своего рода “картой” в пространстве деформаций, на которой представлены все возможные для данного материала скачки деформаций на равновесных границах фаз и ориентации границы фаз.

— Предпочтительное решение краевой задачи может быть выбрано в результате соотнесения полей деформаций, соответствующих разным

решениям, с зоной ФП [13, 17, 16, 19].

1. Исходные соотношения.

В случае малых деформаций задача о равновесных двухфазных конфигурациях упругого тела приводится к задаче определения поверхности раздела фаз Γ и соответствующего поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, достаточно гладкого при $\mathbf{x} \notin \Gamma$, непрерывного на Γ , и удовлетворяющего граничным условиям и условиям равновесия [15, 14]

$$\mathbf{x} \notin \Gamma : \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \theta = \text{const}, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma : \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2)$$

$$[f] - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{x} – точка тела, \mathbf{u} – вектор перемещений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, θ – температура, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе фаз Γ . Объемная плотность свободной энергии f моделируется квадратичными зависимостями (Рис. 1)

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \min_{-,+} \{f^-(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta), f^+(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)\} \quad (4)$$

$$f^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = f_0^\pm(\theta) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p) : \mathbf{C}_\pm : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p),$$

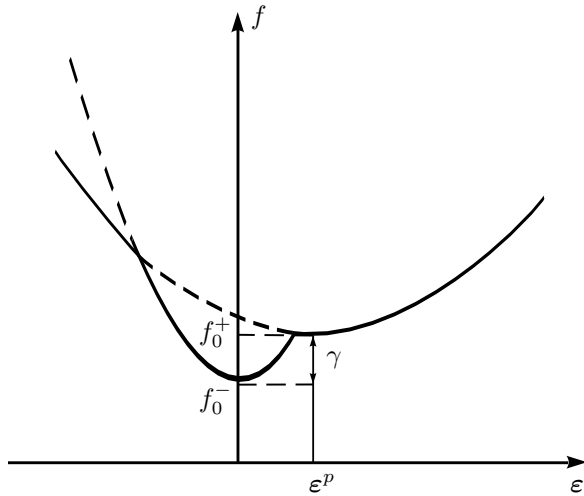


Рис. 1. Свободная энергия

индексами “–” и “+” обозначен материал в различных фазовых состояниях, в формулах подразумевается соответствие верхних и нижних знаков “+” и “–”, квадратными скобками обозначено изменение величины при переходе от фазы “–” к фазе “+”, \mathbf{C}_\pm – положительно-определенные тензоры модулей упругости фаз, параметры f_0^\pm и $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p$ имеют смысл плотностей свободной энергии и тензоров деформации фаз в ненапряженном состоянии (если положить $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p =$

0, то $[\boldsymbol{\varepsilon}^p] = \boldsymbol{\varepsilon}^p$ – “собственная” деформация превращения). Массовые силы, термоупругие напряжения и поверхностная энергия не учитываются. Если \mathbf{C}_\pm и $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p$ не зависят от температуры, то параметр $\gamma(\theta) = [f_0]$ играет роль температуры.

Термодинамическое условие (3) приводится к уравнению, определяющему однопараметрическое семейство нормалей к границе фаз в зависимости от деформаций по одну из сторон границы [9]. Если тензор $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_+ - \mathbf{C}_-$ невырожденный, то это уравнение может быть записано в q -пространстве [15]

$$\gamma_* + \frac{1}{2}\mathbf{q}_\pm : (\mathbf{C}_1^{-1} \pm \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n})) : \mathbf{q}_\pm = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p], \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_\pm(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{G}_\pm \otimes \mathbf{n}\}^s, \quad \mathbf{G}_\pm = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_\pm \cdot \mathbf{n})^{-1}$$

$$\gamma_* = \gamma + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] : \mathbf{B}_1^{-1} : [\boldsymbol{\varepsilon}^p],$$

$$\mathbf{B}_\pm = \mathbf{C}_\pm^{-1}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-.$$

(знак s обозначает операцию симметризации: $K_{ijkl} = n_{(i}G_{j)(k}n_{l)}$.)

2. Зоны фазовых переходов в случае изотропных фаз.

Если тензор \mathbf{C}_1 – невырожденный, то построение зоны ФП удобно проводить в q -пространстве, используя уравнение равновесия в виде (5) [13, 15]. Зона ФП состоит из двух подзон \mathcal{Q}_\pm , тензоры \mathbf{q} из которых, согласно (5), удовлетворяют соответственно неравенствам

$$\mathcal{K}_{\min}^\mp(\mathbf{q}_\pm) \leq \mp\varphi(\mathbf{q}_\pm) \leq \mathcal{K}_{\max}^\mp(\mathbf{q}_\pm), \quad (7)$$

$$\mathcal{K}_\mp(\mathbf{q}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2}\mathbf{q} : \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) : \mathbf{q}, \quad \varphi(\mathbf{q}) = \gamma_* + \frac{1}{2}\mathbf{q} : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{q} \quad (8)$$

$$\mathcal{K}_{\max}^\mp(\mathbf{q}_\pm) = \max_{\mathbf{n}} \mathcal{K}_\mp(\mathbf{q}_\pm, \mathbf{n}),$$

$$\mathcal{K}_{\min}^\mp(\mathbf{q}_\pm) = \min_{\mathbf{n}} \mathcal{K}_\mp(\mathbf{q}_\pm, \mathbf{n}).$$

Поверхности $f^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = f^+(\boldsymbol{\varepsilon})$, делящей согласно (4) пространство деформаций на области определения фаз, в q -пространстве соответствует поверхность

$$\varphi(\mathbf{q}) = 0, \quad (9)$$

которая проходит между подзонами \mathcal{Q}_\pm . Каждая подзона имеет внешнюю и внутреннюю границы, которым соответствуют нормали к границе фаз

$$\mathbf{n}_{\text{ex}}^\pm(\mathbf{q}) = \arg \max_{\mathbf{n}} \mathcal{K}_\mp(\mathbf{n}, \mathbf{q}),$$

$$\mathbf{n}_{\text{in}}^\pm(\mathbf{q}) = \arg \max_{\mathbf{n}} \mathcal{K}_\mp(\mathbf{n}, \mathbf{q}), \quad (10)$$

а уравнения внешних и внутренних границ подзон “±” получаются после подстановки (10) в (5). В

силу изотропии достаточно рассмотреть случай $q_1 \geq q_2 \geq q_3$. Построение зоны ФП удобно проводить, используя цилиндрические координаты

$$z = tr \mathbf{q}, \quad r = \sqrt{((q_1 - q_2)^2 + (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_3)^2) / 3},$$

$\varphi = \arctg(\mu_q / \sqrt{3})$, где $\mu_q = (2q_2 - q_1 - q_3) / (q_1 - q_3)$ ($q_1 \geq q_2 \geq q_3$) — параметр Лоде-Надаи, характеризующий в q -пространстве вид деформированного состояния.

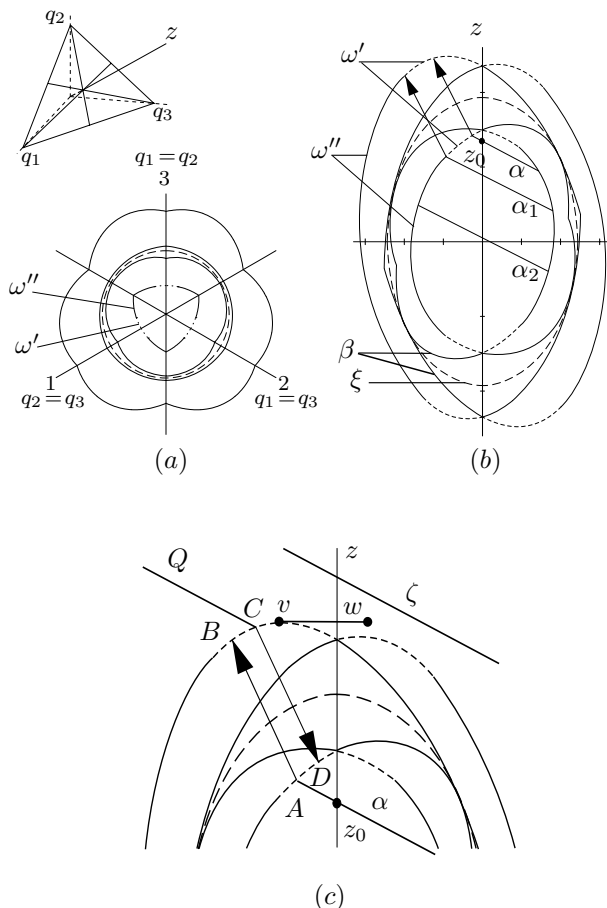


Рис. 2. Сечения зоны фазовых переходов и траектории деформирования ($\mu_+ < \mu_-$, $K_+ < K_-$): (a) - сечение плоскостью $tr \mathbf{q} = const$, (b) - плоскостью $q_2 = q_3 = q$; (c) - траектории одноосного растяжения.

На Рис. 2b и 3 приведены примеры сечений зоны ФП плоскостью $q_2 = q_3 = q$, а на Рис. 2a — пример девиаторного сечения плоскостью $z = const$. Пунктир ξ соответствует уравнению (9) и разделяет области определения фаз “-” и “+”. Точка z_0 соответствует недеформированному состоянию фазы “-”. В зависимости от соотношения между главными значениями тензора \mathbf{q} внешним границам зоны ФП соответствует граница фаз с нормалью,

совпадающей с главным направлением тензора \mathbf{q} (например, если $q_1 > q_2 > q_3$, то $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$) — пунктиры ω' на Рис. 2a, b и a, или с нормалью, лежащей в главной плоскости тензора \mathbf{q} (сплошные линии ω''); β — внутренние границы подзон Q_{\pm} .

Стрелками обозначены скачки деформаций. На границах фаз, соответствующих частям ω' границы зоны ФП, скачком меняется только наибольшее главное значение тензора деформаций. На границах, соответствующих ω'' происходят сдвиги. Таким образом, тип границы фаз зависит от деформированного состояния и параметров материала. Заметим, что существуют случаи, когда границе зоны ФП соответствуют границы фаз только типа “полосы сдвига” (Рис. 3b).

Если тензор \mathbf{C}_1 — знакоопределенный, то зоны ФП ограничены замкнутыми поверхностями (Рис. 2b). Если тензор \mathbf{C}_1 — не знакоопределенный, то зоны ФП — разомкнутые (Рис. 3), что означает невозможность ФП на некоторых траекториях деформирования.

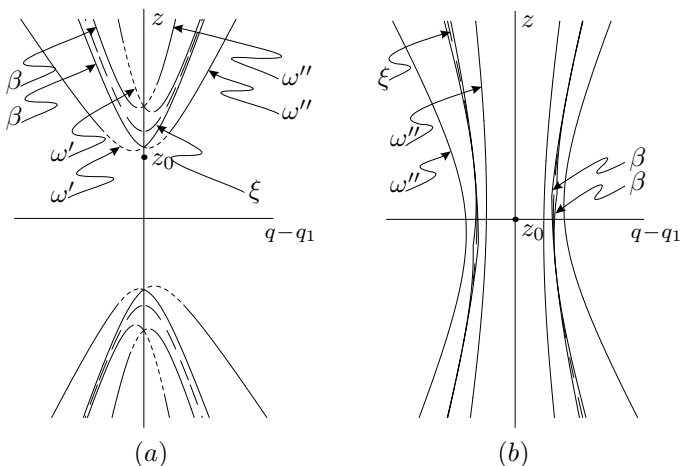


Рис. 3. Сечения зоны ФП плоскостью $q_2 = q_3 = q$, \mathbf{C}_1 - знаконеопределенный: (a) - $\mu_1 > 0$, $K_1 < 0$; (b) - $\epsilon^p = 0$, $\mu_1 < 0$, $K_1 > 0$

Положение зоны ФП зависит также и от “температуры” γ . При изменении параметра γ зона ФП смещается вдоль оси z и растягивается или сжимается. В результате, при изменении температуры становится возможным фазовое превращение из недеформированного состояния z_0 .

3. Возникновение слоя новой фазы при одноосном растяжении-сжатии.

Каждая точка зоны ФП соответствует однородному внешнему полю $\epsilon_0 = \epsilon_-$ или ϵ_+ , в котором может находиться равновесный слой фазы “+” или “-”. Например, точке A подзоны ФП “-” (Рис. 2c) соответствует решение задачи о слое фазы “+”, находящемся в однородном

внешнем поле деформаций ϵ_A . Тогда поле внутри слоя представлено на границе подзоны “+” точкой B . При этом, согласно (10), нормаль к слою однозначно определяется тензором ϵ_A и параметрами материала.

Рассмотрим влияние траектории деформирования на тип локализации деформаций, вызванной фазовыми превращениями, на примере возникновения слоя новой фазы при одноосном растяжении/сжатии в направлении e_1 под гидростатическим давлением p . Траекториям деформирования из ненапряженного состояния фазы “-” соответствуют прямые α ($p = 0$), α_1 ($p = p_1$), и α_2 ($p = p_2 > p_1$) (Рис. 2b). В случае одноосного сжатия достижению границы зоны ФП соответствует возникновение слоя, аналогичного полосе сдвига, в то время как при растяжении возникает граница фаз, нормаль к которой совпадает с направлением растяжения (траектории α и α_1). Скачки деформаций на такой границе фаз представлены стрелками. Начиная с некоторого давления, происходит смена типа локализации деформаций - при растяжении возникает граница типа полосы сдвига (траектория α_3). Отметим, что в случае полосы сдвига скачок деформаций происходит из плоскости $q_2 = q_3$.

В зависимости от параметров материала траектории разгрузки из однофазного состояния “+” либо пересекают зону ФП (линия QC на Рис. 2c), и тогда мы получаем решение задачи о возникновении слоя фазы “-”, либо проходят мимо зоны (линия ζ на Рис. 2c). Точка пересечения с внешней границей подзоны “+”, вообще говоря, не совпадает с точкой, куда при нагружении происходил скачок из фазы “-”. Эффект несовпадения объясняется влиянием внутренних напряжений, индуцируемых границей фаз. Действительно, траекториям z_0A и QC одноосного нагружения в однофазных состояниях соответствует $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. В то же время, в силу непрерывности перемещений на границе фаз, напряжения в слое, действующие в направлении параллельном границе фаз, не равны нулю (за исключением специальных случаев, рассмотренных далее). Если граница фаз, например, ориентирована перпендикулярно направлению растяжения, то напряжения σ_2 и σ_3 , соответствующие точке B , не равны нулю. Именно поэтому точки B и C не совпадают.

Прохождение траектории разгрузки мимо зоны ФП означает, по-видимому, что материал не может вернуться в исходное фазовое состояние исключительно по механизму возникновения параллельных слоев исходной фазы. Этот случай будет прокомментирован ниже.

4. Равновесные двухфазные деформации и зона ФП.

Представление кусочно-однородных двухфазных решений на зоне ФП рассмотрено в предыдущем параграфе.

Соотнесение центрально-симметричных двухфазных полей деформаций с зоной ФП рассмотрено в [17, 16, 19].

В однородном внешнем поле деформаций может также появиться эллипсоидальный зародыш новой фазы, причем, как показано в [9], тензор \mathbf{q} внутри равновесного зародыша является шаровым и должен принимать значение, зависящее исключительно от параметров материала. Из этого требования следует зависимость формы равновесного зародыша (соотношения полуосей эллипсоида) от внешнего поля и параметров материала.

На Рис. 2c возникновению эллипсоидального зародыша фазы “-” соответствуют точка E (поле внутри зародыша) и отрезок vw (все возможные внешние поля, в которых может существовать эллипсоидальный зародыш). Точка v соответствует деформациям на границе эллипсоида со стороны фазы “+”. Если траектория разгрузки пересекает отрезок vw , то точка пересечения соответствует внешнему полю, в котором возможно возникновение эллипсоидального зародыша фазы “-”.

Отметим, что случаи слоя и эллипсоидального зародыша не исчерпывают все возможные формы зарождения новой фазы.

5. Фазовые превращения по механизму множественного возникновения слоев новой фазы.

Предположим, что новая фаза возникает в виде плоских параллельных слоев. Граничными условиями в двухфазной слоистой среде задаются средние деформации $\hat{\epsilon}$. Параметрами двухфазной структуры являются: p - объемная концентрация новой фазы “+” ($p \in [0, 1]$), \mathbf{n} - нормаль к слою, \mathbf{O} - тензор поворота, связывающий триэдры направлений анизотропии новой фазы с главными направлениями тензора $\hat{\epsilon}$.

Исходные уравнения для данной модели зарождения новой фазы были предложены в [12]. Средние по объему напряжения и деформации в произвольной слоистой среде представимы как

$$\hat{\sigma} = \sigma_- + p[\sigma] = \sigma_- + p\mathbf{S}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{m}_- \quad (11)$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_- + p[\epsilon] = \epsilon_- + p\mathbf{K}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_- \quad (12)$$

и связаны соотношениями

$$\hat{\sigma} = \mathbf{C}_- : \hat{\epsilon} - p(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 : \mathbf{K}_+) : \mathbf{q}_- = \mathbf{C}_* : \hat{\epsilon} - p\sigma_*, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{C}_* = \mathbf{C}_- + p \mathbf{C}_1 : \mathbf{K}_+ : \mathbf{L} \quad (14)$$

— эффективный тензор модулей упругости слоистого композита, $\mathbf{L} = \{\mathbf{C}_1^{-1} - p \mathbf{K}_+(\mathbf{n})\}^{-1}$,

$$\boldsymbol{\sigma}_* = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 : \mathbf{K}_+) : \mathbf{L} : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{C}_+ : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (15)$$

\mathbf{I} — единичный тензор четвертого ранга.

Зависимость средней плотности свободной энергии Гельмгольца \hat{f} от средних деформаций приводится к виду

$$\hat{f} = f_0^- + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}_- : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varphi(p, \mathbf{n}, \mathbf{O} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (16)$$

где первых два слагаемых — определяют плотность энергии в однофазном состоянии “-” при тех же деформациях $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, “добавка” φ зависит от параметров структуры:

$$\varphi(p, \mathbf{n}, \mathbf{O} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = p \left(\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{e} : (\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 : \mathbf{K}_+) : \mathbf{L} : \mathbf{e} \right) \quad (17)$$

где

$$\mathbf{e} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}_- : \mathbf{B}_1^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (18)$$

При заданных средних деформациях $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ параметры p , \mathbf{n} и \mathbf{O} являются внутренними, в равновесном состоянии обеспечивают стационарность $\varphi(p, \mathbf{n}, \mathbf{O} | \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ и, следовательно, зависят от $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Это, в свою очередь, приводит к тому, что эффективные модули упругости также зависят от $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Материал из линейно-упругого композита становится на макроуровне нелинейным материалом с изменяющейся структурой.

Далее исследуются два случая, когда:

1) Материал обеих фаз — изотропный, тензор собственной деформации — шаровой. Параметрами структуры являются p и \mathbf{n} .

2) Изменением модулей упругости при фазовом переходе можно пренебречь. Такие превращения далее будем называть деформационными фазовыми переходами. Полагаем, что материал в исходном состоянии — изотропный, тензор $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ — не шаровой. В этом случае в набор параметров структуры, помимо p и \mathbf{n} , входит тензор поворота, определяющий главные направления тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

Для обоих случаев траектории деформирования по механизму возникновения слоев сопоставляются с зонами ФП.

6. Траектории деформирования по механизму возникновения слоев и зоны ФП в случае изотропных фаз.

Для случая изотропных фаз рассмотрим одноосное растяжение-сжатие вдоль направления “1”. Зависимость $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_3 = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ от $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ находится из условия $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = 0$, где средние напряжения

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(p, \mathbf{n}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ определяются из соотношения (13) с учетом зависимости p от $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$.

Сопоставим средние и локальные поля с зоной ФП (Рис. 4). Траектория одноосного растяжения вдоль направления “1” на плоскости $q_2 = q_3 = q$ представлена на Рис.4 линией $OACQ$. На отрезках OA и CQ средние поля совпадают с локальными. Отрезок AC соответствует изменению средних деформаций $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ и $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1)$ на траектории превращения. В точках A и C концентрации новой фазы равны, соответственно, $p = 0$ и $p = 1$.

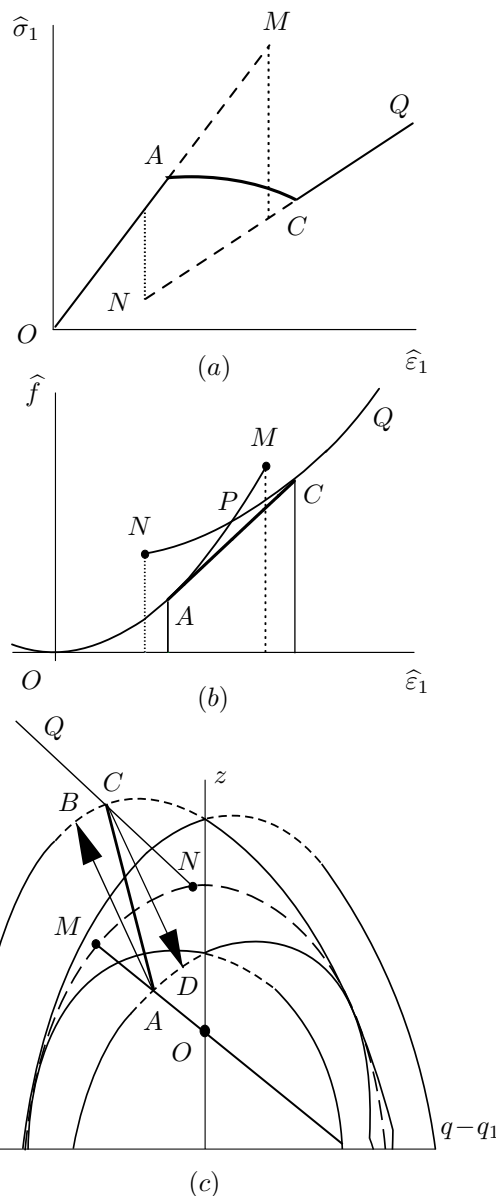


Рис. 4. Фазовые превращения при одноосном растяжении: (а) — диаграмма деформирования; (б) — энергия однофазных и двухфазного состояний; (с) — зона ФП и траектория деформирования

При достижении точки A становится возможным зарождение слоев новой фазы, перпендикулярных направлению растяжения. Скачок деформаций на границе фаз обозначен стрелкой AC .

В процессе превращения деформации на границе фаз меняются, но остаются на границе зоны ФП: скачок “перемещается” из AB в DC при прямом превращении и из CD в BA при обратном превращении, в то время как средние деформации находятся на AC .

Соответствующая диаграмма деформирования и энергетические изменения в процессе ФП представлены на Рис. 4 а, б. На траектории превращения AC имеет место эффект деформационного размягчения (здесь $tr\epsilon^p > 0$, $C_1 < 0$). В зависимости от параметров материала на траектории превращения может наблюдаться также эффект деформационного упрочнения - роста среднего напряжения при увеличении средней деформации. Средняя плотность энергии f двухфазного состояния меньше энергии однофазных.

Ветви OAM и NCQ соответствуют однородному растяжению материала, находящегося в фазовом состоянии “-” или “+”. Отметим, что точка P пересечения ветвей на зависимости плотности энергии не принадлежит поверхности (9), разделяющей в пространстве деформаций области определения фаз “-” и “+” и проходящей между подзонами \pm . Это связано с тем, что законы изменения $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}_1)$ при одноосном растяжении различны для материала в различных фазовых состояниях. Точке пересечения ветвей соответствует одна и та же деформация $\hat{\epsilon}_1$, но разные деформации $\hat{\epsilon}$, то есть различные точки в пространстве деформаций (точки M и N на Рис. 4с). “Скрытая” на Рис. 4б вторая компонента тензора деформаций приводит к тому, что в некотором диапазоне $\hat{\epsilon}_1$ могут существовать два однофазных состояния, одно из которых метастабильно относительно другого. В результате в интервале деформаций AC помимо двухфазных становятся возможными два равновесных однофазных состояния. Аналогичная особенность для случая конечных деформаций отмечалась ранее в [18].

При исследовании влияния параметров на закономерности превращения был обнаружен эффект незавершенности превращения по механизму возникновения слоев. В случае прохождения траектории разгрузки мимо зоны ФП (прямая ζ на Рис. 2) диаграмма деформирования имеет вид, представленный на Рис. 5. Концентрация новой фазы достигает

максимального значения $c^* < 1$ в точке C^* . При дальнейшем деформировании происходит срыв на ветвь, соответствующую однофазному состоянию “+”.

Данное рассмотрение не исключает возможность других механизмов превращения, например, возникновения слоев более сложной структуры.

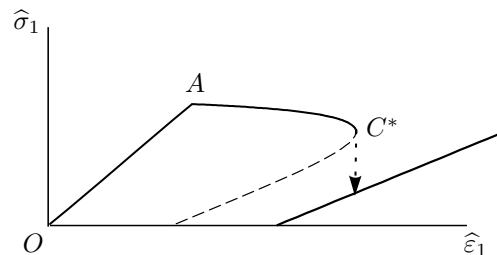


Рис. 5. Диаграмма деформирования – незавершенность превращения по механизму возникновения слоев новой фазы

7. Зоны ФП и траектории деформирования при деформационных ФП.

Особенностью деформационного ФП при не шаровом тензоре ϵ^p является необходимость определения и учета ориентации его главных направлений e_1, e_2, e_3 . На Рис. 6 и 7 приведены примеры сечения зоны ФП плоскостью $\hat{\epsilon}_2 = 0$ для различных тензоров ϵ^p , а также траектории плоского растяжения в направлении 1 ($\hat{\sigma}_3 = 0, \hat{\epsilon}_2 = 0$) и соответствующие диаграммы деформирования.

Как и в случае изотропных фаз, границы зон ФП (поверхности превращения) в зависимости от тензора собственной деформации могут быть как замкнутыми (аналогичными поверхности пластичности Треска), так и не замкнутыми. Во втором случае ФП невозможен на некоторых траекториях деформирования.

В зависимости от главных значений тензора ϵ^p деформирование может сопровождаться возникновением слоев, аналогичных полосе сдвига (Рис. 6) или слоев с нормалью, перпендикулярной направлению деформирования (Рис. 7), либо совпадающей с ним (при сжатии).

Как и в случае изотропных фаз, траектория деформирования проходит или не проходит через траекторию скачка деформаций при зарождении слоя новой фазы. В первом случае имеет место диаграмма деформирования, аналогичная диаграммам идеального упруго-пластического материала, во втором случае превращение сопровождается деформационным разупрочнением.

Траектория разгрузки и начало обратного превращения зависят от ориентации тензора собственной деформации на этапе прямого превращения. На Рис. 6 показаны триэдры осей

тензора ε^p для переходов в различных областях пространства деформаций. Если в результате прямого превращения материал переходит в деформированное состояние A с соответствующей ориентацией тензора ε^p , то при последующем деформировании по пути ABC равновесная граница сможет впервые появиться в точке B — до достижения точки C .

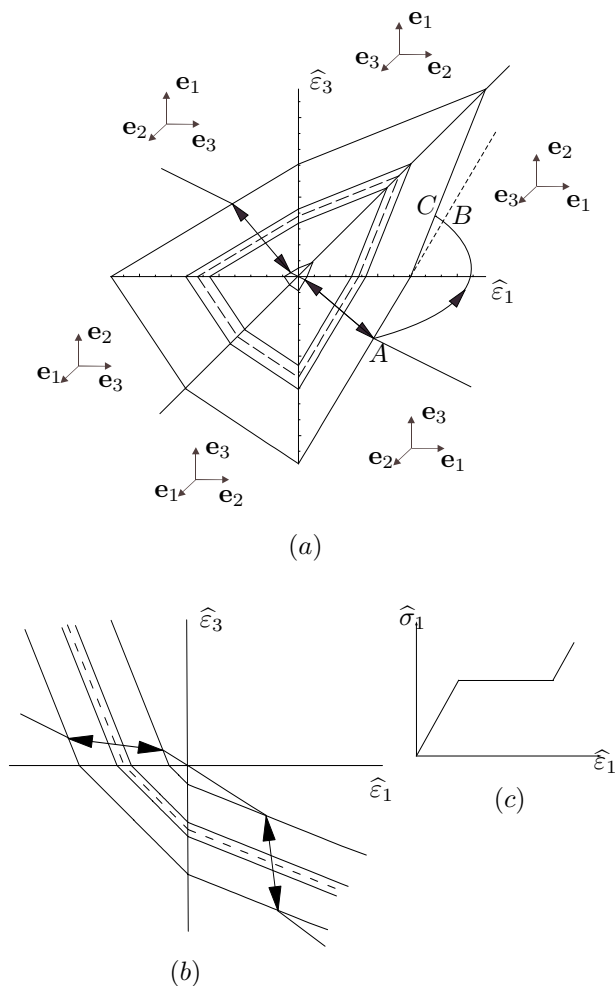


Рис. 6. Плоские сечения зоны ФП и диаграммы деформирования при деформационных ФП в зависимости от тензора ε^p : (а) — $\varepsilon_1^p > 0$, $\varepsilon_2^p = 0$, $\varepsilon_3^p < 0$; (б) — $\varepsilon_1^p > 0$, $\varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p < 0$; (с) — диаграмма деформирования для случаев (а) и (б)

Траектории плоского растяжения материала, находящегося в однофазных состояниях “–” и “+” представлены на Рис. 7а,б прямыми OA и CQ . Траектории превращения (изменению концентрации от 0 до 1) соответствует отрезок AC . В процессе превращения локальные поля меняются так, что скачок AB перемещается в сторону скачка DC . С точки зрения ориентации тензора ε^p при прямом превращении, в первом

случае точка C находится в той же области пространства деформаций, что и точка A .

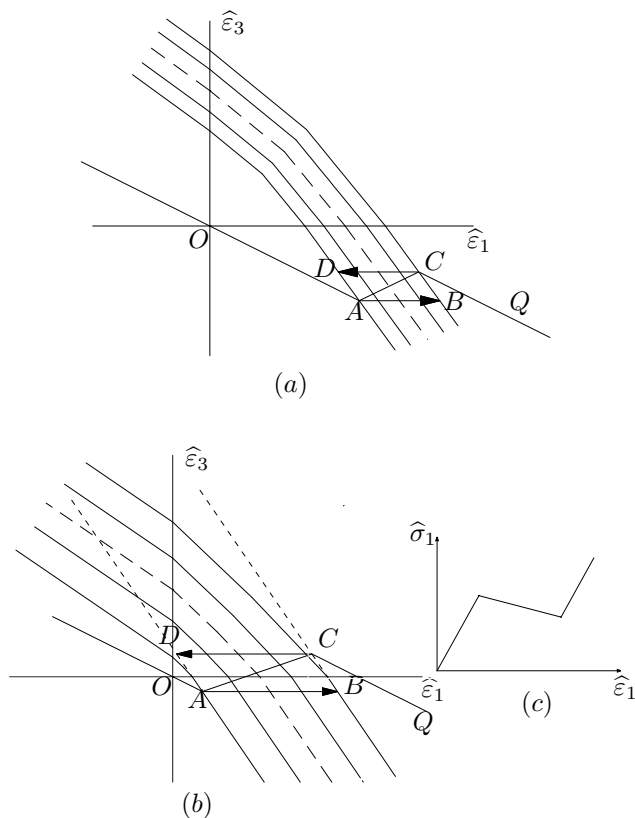


Рис. 7. Плоские сечения зоны ФП (а, б) и типичная диаграмма деформирования (с) при деформационных ФП в зависимости от тензора ε^p : $\gamma = 0.05$, (а) — $\varepsilon_1^p = 0.02$, $\varepsilon_2^p = 0.01$, $\varepsilon_3^p = 0.005$, (б) — $\varepsilon_1^p = 0.07$, $\varepsilon_2^p = 0.06$, $\varepsilon_3^p = 0.005$

При другом выборе параметров ε_k^p (Рис. 7 б) обратное превращение начинается в точке C , лежащей на продолжении фрагмента построенной границы подзоны “+” (пунктир на Рис. б). Сплошная линия в этой области пространства деформаций соответствует другой ориентации осей тензора ε^p . В этом случае скачок происходит внутрь зоны ФП.

8. Заключение.

Проведенное исследование показало:

- В зависимости от параметров материала зона ФП может быть замкнутой или разомкнутой, что означает невозможность ФП на некоторых траекториях деформирования.
- В зависимости от параметров материала и вида деформированного состояния границе зоны ФП соответствуют границы фаз, пер-

пендикулярные направлению, соответствующему наибольшему главному значению тензора деформаций или аналогичные полосе сдвига. Изменение вида деформированного состояния может приводить к смене типа локализации деформаций вследствие фазовых превращений.

- Представление траекторий деформирования на зонах ФП позволяет предсказывать тип возникающей границы фаз. На примере одноосного растяжения и сжатия под гидростатическим давлением продемонстрировано влияние давления на тип границы фаз.
- В зависимости от характера внутренних напряжений, порождаемых областями новой фазы, траектория разгрузки проходит или не проходит через точку, в которую происходит скачок деформаций на границе фаз при нагрузке.
- На примере построения диаграмм деформирования при одноосном растяжении и сжатии показано, что, в зависимости от параметров материала, фазовое превращение сопровождается эффектами деформационного разупрочнения или упрочнения.
- Существует эффект незавершенности фазового перехода по механизму возникновения слоев. Траектория разгрузки при этом проходит мимо зоны ФП.
- Анизотропия новой фазы приводит к влиянию истории фазового превращения на поведение материала при разгрузке.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минпромнауки (40.010.1 1.1195), РФФИ (01-01-00324, 03-01-06136) и Программы фундаментальных исследований ОЭМППУ РАН.

Список литературы

1. *Гринфельд М.А.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824-827.
2. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука. 1990. 312 с.
3. *Кондауров В.И., Никитин Л.В.* О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // Докл. АН СССР. 262 (1982) № 6., С. 1348-1351.
4. *Трускиновский Л.М.* Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 306-310.
5. *Gurtin M.E.* Two-phase deformations of elastic solids // Arch. Rat. Mech. Anal. 84 (1983) P. 1-2
6. *J.K. Knowles and E. Sternberg, On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics.* J. Elasticity 8 (1978) 329-379.
7. *James R.D.* Finite deformation by mechanical twinning // Arch. Rat. Mech. Anal. 77 (1981) P. 143-177.
8. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
9. *Кубланов Л.Б., Фрейдлин А.Б.* Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 493-501.
10. *Фрейдлин А.Б.* Трещины серебра и полосы сдвига в стеклообразных полимерах как слои новой фазы // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 3-10.
11. *Фрейдлин А.Б., Чискис А.М.* Зоны фазовых переходов в нелинейно-упругих изотропных материалах. Ч.1. Основные соотношения. // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 91-109.
12. *Фрейдлин А.Б.* Гетерогенное деформирование упругих тел вследствие множественного возникновения слоев новой фазы // Научные труды I Международного семинара "Актуальные проблемы прочности" им. В.А.Лихачева. Новгород, 15-18 октября 1997 г. Т.1. С. 236-240.
13. *Морозов Н.Ф., Фрейдлин А.Б.* Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С. 220-232.
14. *Назыров И.Р., Фрейдлин А.Б.* Фазовые превращения при деформировании твердых тел в модельной задаче об упругом шаре // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 52-71.
15. *Фрейдлин А.Б.* Приближение малых деформаций в теории фазовых превращений при деформировании упругих тел. // Прочность и разрушение материалов и конструкций. Межвуз. сб. под ред. Н.Ф. Морозова. (Исследования по упругости и пластичности. 1999. Вып. 18. С. 266-290.)
16. *A.B.Freidin, V.A.Eremeyev, L.L. Sharipova* On nonuniqueness and stability of centrally symmetric two phase deformations // The proceedings of the XXIX Summer School "Advanced Problems in Mechanics". - SPb.: IPME RAS, 2002, pp. 73-83.
17. *Еремеев В.А., Фрейдлин А.Б., Шарипова Л.Л.* О центрально-симметричных двухфазных полях деформаций // Пробл. мех. деформ. тв. тела. Межвуз. сб-к к 70-летию акад. Морозова Н.Ф. СПб: Изд-во СПбГУ. 2002, С. 111-122.
18. *A.B. Freidin, E.N. Vilchevskay, L.L. Sharipova.* Two-phase deformations within the framework of phase transition zones // Theoretical and Applied Mechanics. 2002. Vol. 28-29, P. 149-172.
19. *Еремеев В.А., Фрейдлин А.Б., Шарипова Л.Л.* О неединственности и устойчивости в задачах равновесия упругих двухфазных тел // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 2 С. 189-193.